01

Να αποδειχθει οτι :

α) Η συναρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$ ειναι γνησιως αυξουσα .

β) Για κ≥1 ισχυουν : $\sqrt{\kappa} \le \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x}dx$ και $\int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x}dx \le \sqrt{x}$.

α)

Η f εχει πεδιο ορισμου το $A=[0,+\infty)$ και ειναι συνεχης σε αυτο. Ακομη για καθε $x \in (0,+\infty)$ ειναι $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$, οποτε η f ειναι γνησιως αυξουσα στο A .

β)

- $x \in [\kappa,\kappa+1]: \kappa \le x \Rightarrow \sqrt{\kappa} \le \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}-\sqrt{\kappa} \ge 0 \Rightarrow \int_{\kappa}^{\kappa+1} (\sqrt{x}-\sqrt{\kappa})dx \ge 0 \Rightarrow \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x}dx - \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{\kappa}dx \ge 0 \Rightarrow$

$\int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x}dx \ge \sqrt{\kappa} \int_{\kappa}^{\kappa+1} 1dx \Rightarrow \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x}dx \ge \sqrt{\kappa}\ (\kappa+1-\kappa) \Rightarrow \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x}dx \ge \sqrt{\kappa}$.

- $x \in [\kappa-1,\kappa]: x \le \kappa \Rightarrow \sqrt{\kappa} \le \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}-\sqrt{\kappa} \ge 0 \Rightarrow \int_{\kappa-1}^{\kappa} (\sqrt{\kappa}-\sqrt{x})dx \ge 0 \Rightarrow \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{\kappa}dx - \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x}dx \ge 0 \Rightarrow$

$\sqrt{\kappa} \int_{\kappa-1}^{\kappa} 1dx - \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x}dx \ge 0 \Rightarrow \sqrt{\kappa}\ [\kappa-(\kappa-1)] \ge \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x}dx \Rightarrow \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x}dx \le \sqrt{\kappa}$.

02

Δινεται η συναρτηση f με $f(x)=x^2+\frac{2a}{x}+\beta$, (a , $\beta \in \mathbb{R}$) η οποια μηδενιζεται στο $x_1=1$ και παρουσιαζει τοπικο ακροτατο στο $x_o=2$.

α) Να βρεθουν τα α , β .

β) Να βρεθει το ειδος του ακροτατου και η τιμη του .

α)

Το πεδιο ορισμου της f ειναι το $A=\mathbb{R}-\{0\}$, ειναι παραγωγισιμη σε αυτο με $f'(x)=2x-\frac{2a}{x^2}$.

Επειδη η f εχει τοπικο ακροτατο στο $x_o=2$, συμφωνα με το Θεωρημα Fermat θα ειναι $f'(2)=0 \Leftrightarrow 4-\frac{2a}{4}=0 \Leftrightarrow a=8$.

Επειδη η f μηδενιζεται στο $x_1=1$ θα ειναι
$f(1)=0 \Leftrightarrow 1+2a+\beta=0 \Leftrightarrow 1+16+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-17$.

β)

Για α=8 και β=-17 εχουμε:

$f(x)=x^2+\frac{16}{x}-17$, $f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2(x^3-8)}{x^2}$ οποτε

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2(x^3-8)}{x^2}>0 \Leftrightarrow x^3-8>0 \Leftrightarrow x>2$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<2$.

Αρα η f παρουσιαζει τοπικο ελαχιστο στη θεση $x_o=2$, το $f(2)=4+8-17=-5$.

03

Δινεται η συναρτηση f με $f(x)=\eta\mu(2x+\frac{\pi}{2})$ και πεδιο ορισμου το διαστημα $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$.

α) Να βρεθει η εξισωση της εφαπτομενης της γραφικης παραστασης της f στο σημειο $x_o=\frac{\pi}{8}$.

β) Να υπολογιστει το εμβαδον του χωριου που περικλειεται απο την παραπανω εφαπτομενη, τη γραφικη παρασταση της f και απο τους θετικους ημιαξονες Οx , Οy .

α)

Για καθε $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ ειναι :

- $f(x)=\eta\mu(2x+\frac{\pi}{2})=\eta\mu(\frac{\pi}{2}-(-2x))=\sigma\upsilon\nu(-2x)=\sigma\upsilon\nu(2x)$
- $f'(x)=-\eta\mu(2x)\cdot(2x)'=-2\eta\mu(2x)$.

Εχουμε $f(\frac{\pi}{8})=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $f'(\frac{\pi}{8})=-2\eta\mu\frac{\pi}{4}=-2\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$.

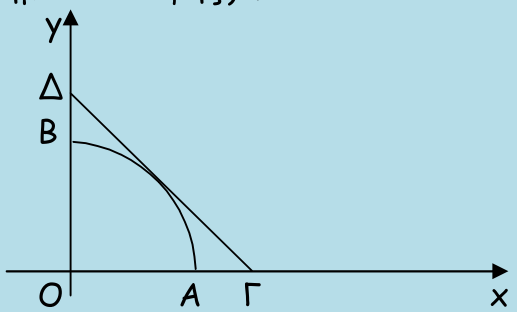
Η ζητουμενη εξισωση της εφαπτομενης ειναι

$$y-f(\frac{\pi}{8})=f'(\frac{\pi}{8})(x-\frac{\pi}{8})\Leftrightarrow y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}(x-\frac{\pi}{8})\Leftrightarrow y=-\sqrt{2}x+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

β)

Εστω Α, Β τα σημεια τομης της C_f και Γ, Δ τα σημεια τομης της εφαπτομενης με τους θετικους ημιαξονες Οx, Οy.

Ειναι $f''(x)=-4\sigma\upsilon\nu(2x)<0$ για καθε $x\in(0,\frac{\pi}{4})$, οποτε η f στρεφει τα κοιλα κατω στο $[0,\frac{\pi}{4}]$ και συνεπως η εφαπτομενη βρισκεται πανω απο την C_f (με εξαιρεση το σημειο επαφης) .



Το ζητουμενο εμβαδο Ε ειναι ισο με το εμβαδο του τριγωνου ΟΓΔ μειον το εμβαδο του χωριου που περικλειεται απο την C_f και τους θετικους ημιαξονες Οx, Οy. Η f ειναι συνεχης στο $[0,\frac{\pi}{4}]$ οποτε

$$E=\frac{1}{2}(O\Gamma)(O\Delta)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu(2x)dx=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2})(\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2})-[\frac{1}{2}\eta\mu(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

04

Εστω f , g συναρτησεις με πεδιο ορισμου ενα διαστημα Δ , για τις οποιες υποθετουμε οτι :

i) ειναι δυο φορες παραγωγισιμες στο Δ, ii) $f''=g''$, iii) $0\in\Delta$ και $f(0)=g(0)$.

Να δειχθει οτι :

α) Για καθε $x\in\Delta$, $f(x)-g(x)=cx$ οπου $c\in\mathbb{R}$.

β) Αν η $f(x)=0$ εχει δυο ετεροσημες ριζες ρ_1 , ρ_2 , τοτε η $g(x)=0$ εχει τουλαχιστον μια ριζα στο $[\rho_1 , \rho_2]$.

α)

Για καθε $x\in\Delta$ εχουμε:

$f''(x)=g''(x)\Leftrightarrow f'(x)=g'(x)+c,\ c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f'(x)=(g(x)+cx)'\Leftrightarrow f(x)=g(x)+cx+c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ εχουμε: $f(0)=g(0)+c\cdot 0+c_1\Leftrightarrow c_1=0$, λογω της (iii) .

Αρα για καθε $x\in\Delta$, $f(x)=g(x)+cx\Leftrightarrow f(x)-g(x)=cx$

β)

Λογω του (α) ειναι $g(x)=f(x)-cx$.

Η g ειναι συνεχης στο Δ αρα και στο $[\rho_1,\rho_2]\subseteq\Delta$ αφου ειναι παραγωγισιμη στο Δ. Ειναι ακομη $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$, οποτε:

$g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)=(f(\rho_1)-c\rho_1)(f(\rho_2)-c\rho_2)=(-c\rho_1)(-c\rho_2)=c^2\cdot\rho_1\rho_2\le 0$, αφου οι ριζες ρ_1, ρ_2 ειναι ετεροσημες.

Αν $g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)<0$ τοτε συμφωνα με το θεωρημα του Bolzano η $g(x)=0$ εχει τουλαχιστον μια ριζα στο (ρ_1, ρ_2) .

Αν $g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)=0\Leftrightarrow g(\rho_1)=0$ ή $g(\rho_2)=0$, ετσι η $g(x)=0$ εχει ριζα την ρ_1 ή την ρ_2.

Τελικα λοιπον η $g(x)=0$ εχει τουλαχιστον μια ριζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

05

Να εξετασετε αν η συναρτηση f με $f(x)=\begin{cases}3x^2-5x+6, & x\le 1\\ 2\sqrt{x^2+3}, & x>1\end{cases}$ ειναι παραγωγισιμη στο σημειο $x_o=1$.

Ειναι :

- $$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2-5x+6-4}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2-5x+2}{x-1}\overset{\text{Horner}}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(3x-2)}{x-1}=$$
  $$=\lim_{x\to 1^-}(3x-2)=1 \quad \text{και}$$
- $$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x^2+3}-4}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$
  $$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x^2+3-4)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2}=1.$$

Αρα $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$, επομενως η f ειναι παραγωγισιμη στο σημειο $x_o=1$ με $f'(1)=1$.

06

Εστω συναρτηση f με $f(x)=3x^3-ax^2+\beta x-3$, οπου a , $\beta \in \mathbb{R}$. Εαν η f εχει τοπικα ακροτατα στα $x_1=1$ και $x_2=-\frac{5}{9}$, τοτε να βρεθουν οι αριθμοι a , β .

Η f ως πολυωνυμικη ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ και ειναι $f'(x)=9x^2-2\alpha x+\beta$.

Επειδη η f εχει τοπικα ακροτατα στα $x_1=1$ και $x_2=-\frac{5}{9}$, συμφωνα με το θεωρημα του Fermat θα ειναι $f'(1)=0$ και $f'(-\frac{5}{9})=0$.

Ειναι:

$f'(1)=0 \Leftrightarrow 9\cdot 1^2-2\alpha\cdot 1+\beta=0 \Leftrightarrow -2\alpha+\beta=-9 \quad (1)$

$f'(-\frac{5}{9})=0 \Leftrightarrow 9\cdot\frac{25}{81}-2\alpha(-\frac{5}{9})+\beta=0 \Leftrightarrow 10\alpha+9\beta=-25 \quad (2)$

Λυνοντας το συστημα των (1) και (2) βρισκουμε $\alpha=2$ και $\beta=-5$.

07

Εστω C η γραφικη παρασταση της συναρτησης f με $f(x)=ax^3+\beta x^2+9x-12$. Να προσδιορισετε τα $a,\beta\in\mathbb{R}$ ετσι ωστε το σημειο Α(2,-10) να ανηκει στη C και η εφαπτομενη της C στο Α να εχει συντελεστη διευθυνσης τον αριθμο -3 .

Ειναι: $A\in C \Leftrightarrow f(2)=-10 \Leftrightarrow \alpha\cdot 2^3+\beta\cdot 2^2+9\cdot 2-12=-10 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-4 \quad (1)$

Ακομη $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+9$, $x\in\mathbb{R}$.

Επειδη ο συντελεστης διευθυνσης ειναι –3 θα εχουμε

$f'(2)=-3 \Leftrightarrow 3\alpha\cdot 2^2+2\beta\cdot 2+9=-3 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-3$. (2)

Απο το συστημα των (1), (2) βρισκουμε $\alpha=1$ και $\beta=-6$.

08

Να βρεθει το οριο της συναρτησης f στο $+\infty$ με $f(x)=(\sqrt{7x^4+6x+5}-\sqrt{7x^4+3x+3})\cdot\sqrt{63x^2-5x+20}$.

Επειδη για καθε $x\in\mathbb{R}$ ειναι $63x^2-5x+20>0$ ($\Delta<0$, $63>0$) και για καθε $x>0$ ειναι $7x^4+6x+5>0$, $7x^4+3x+3>0$ ως αθροισματα θετικων αριθμων η f οριζεται στο $(0,+\infty)$ επομενως :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[(\sqrt{7x^4+6x+5}-\sqrt{7x^4+3x+3})\cdot\sqrt{63x^2-5x+20}]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{[(7x^4+6x+5)-(7x^4+3x+3)]\cdot\sqrt{63x^2-5x+20}}{\sqrt{7x^4+6x+5}+\sqrt{7x^4+3x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x+2)\cdot\sqrt{63x^2-5x+20}}{\sqrt{7x^4+6x+5}+\sqrt{7x^4+3x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot(3+\frac{2}{x})\cdot\sqrt{63-\frac{5}{x}+\frac{20}{x^2}}}{x^2\cdot(\sqrt{7+\frac{6}{x^3}+\frac{5}{x^4}}+\sqrt{7+\frac{3}{x^3}+\frac{3}{x^4}})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3+\frac{2}{x})\cdot\sqrt{63-\frac{5}{x}+\frac{20}{x^2}}}{\sqrt{7+\frac{6}{x^3}+\frac{5}{x^4}}+\sqrt{7+\frac{3}{x^3}+\frac{3}{x^4}}}=\frac{(3+0)\cdot\sqrt{63-0+0}}{\sqrt{7+0+0}+\sqrt{7+0+0}}=\frac{3\sqrt{7}\sqrt{9}}{2\sqrt{7}}=\frac{9}{2}$$

09

Δινεται η συναρτηση f με $f(x)=x^4-14x^2+24x$. Εστω C η γραφικη παρασταση της συναρτησης f. Να αποδειχτει οτι υπαρχουν τρια σημεια Α,Β,Γ∈C, τετοια ωστε οι εφαπτομενες της C στα Α,Β,Γ να ειναι παραλληλες προς τον αξονα x΄x .

Για να δειξουμε οτι υπαρχουν τρια σημεια Α,Β,Γ∈C, τετοια ωστε οι εφαπτομενες της C στα Α,Β,Γ να ειναι παραλληλες προς τον αξονα x΄x, αρκει να δειξουμε οτι η εξισωση $f'(x)=0$ εχει τρεις λυσεις στο $\mathbb{R}$. Πραγματι:

$f'(x)=4x^3-28x+24=4(x^3-7x+6) \overset{\text{Horner}}{=} 4(x-1)(x^2+x-6)$, $x\in\mathbb{R}$ και

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4(x-1)(x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow (x-1=0$ ή $x^2+x-6=0) \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$ ή $x=-3$.

10

Να προσδιορισετε τα α , β ∈ $\mathbb{R}$ ωστε η συναρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases} 3ae^{x+1}+x, & x\le -1 \\ 2x^2-ax+3\beta, & -1<x<0 \\ \beta\eta\mu x+\alpha\sigma\upsilon\nu x+1, & 0\le x \end{cases}$$ *, να ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.*

Η f ειναι συνεχης στα διαστηματα $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,+\infty)$ ως αθροισμα συνεχων συναρτησεων. Για να ειναι συνεχης και στα σημεια -1 και 0 πρεπει $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$. Εχουμε :

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(3ae^{x+1}+x)=3ae^0+(-1)=3a-1$,
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(2x2-ax+3\beta)=2(-1)2-a(-1)+3\beta=2+a+3\beta$,
- $f(-1)=3ae0+(-1)=3a-1$.

Αρα πρεπει $3a-1=2+a+3\beta \Leftrightarrow 2a-3\beta=3$ (1)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x2-ax+3\beta)=3\beta$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\beta\eta\mu x+a\sigma\upsilon\nu x+1)=\beta\cdot 0+a\cdot 1+1=a+1$

, $f(0)=a+1$. Αρα πρεπει $a+1=3\beta \Leftrightarrow a-3\beta=-1$ (2)

Λύνοντας το συστημα των (1), (2) βρισκουμε $a=4$ και $\beta=\dfrac{5}{3}$.

11

Δινεται η συναρτηση f με $f(x)=2x^3+3x^2-36x+90$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρειτε τα ακροτατα της συναρτησης f .

Εχουμε $f'(x)=6x^2+6x-36=6(x^2+x-6)$, $x\in\mathbb{R}$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-3$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 6(x^2+x-6)>0 \Leftrightarrow x<-3$ ή $x>2$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in(-3,2)$

Αρα f παρουσιαζει στη θεση –3 τοπικο μεγιστο το $f(-3)=171$ ενω στη θεση 2 παρουσιαζει τοπικο ελαχιστο το $f(2)=46$.

Τα ακροτατα αυτα δεν ειναι ολικα αφου

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$.

12

Εστω η συναρτηση f με $f(x)=(a-\frac{2}{3})x^3-(a+\frac{1}{2})x^2-10x+7$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρειτε το $a\in\mathbb{R}$ ωστε η f να παρουσιαζει καμπη στο $x=\frac{3}{2}$. Μετα για την τιμη αυτη του α , να σχηματισετε τον πινακα μεταβολων της f .

Για καθε $x\in\mathbb{R}$ εχουμε:

$f'(x)=3(a-\frac{2}{3})x^2-2(a+\frac{1}{2})x-10=(3a-2)x^2-(2a+1)x-10$ και $f''(x)=2(3a-2)x-(2a+1)$.

Για να παρουσιαζει η f καμπη στο $x=\frac{3}{2}$, πρεπει

$f''(\frac{3}{2})=0 \Leftrightarrow 2(3a-2)\frac{3}{2}-(2a+1)=0 \Leftrightarrow a=1$.

Για α=1, $f''(x)=2x-3$, οποτε $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$ και $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$.

Αρα η ζητουμενη τιμη του α ειναι το 1. Στη συνεχεια για α=1 εχουμε:

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-10x+7$, $f'(x)=x^2-3x-10$, $f''(x)=2x-3$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=5$.

Το προσημο της f΄(x) και της f΄΄(x) φαινεται στον πινακα που ακολουθει:

x	$-\infty$		-2		$3/2$		$+5$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f''(x)$		-		-	0	+		+	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	
			τ.μ.		σ.κ.		τ.ε.		

• η f ειναι γ.αυξουσα στα $(-\infty,-2)$, $(5,+\infty)$ και γ.φθινουσα στο $[-2,5]$

• f παρουσιαζει τ.μεγιστο στο -2 το $f(-2)=\frac{55}{3}$, τ.ελαχιστο στο 5 το $f(5)=-\frac{233}{6}$

• η f στρεφει τα κοιλα κατω στο $(-\infty,\frac{3}{2})$ και ανω στο $[\frac{3}{2},+\infty)$

• η C_f εχει σημειο καμπης το $(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2}))$ δηλαδη το $(\frac{3}{2},-\frac{41}{4})$.

Επισης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

13

Να βρεθει το οριο της συναρτησης $f(x)=(x2-2x+3)^{\frac{1}{x}}$, στο $+\infty$.

Επειδη πρεπει $x\neq 0$ και ισχυει $x^2-2x+3=x^2-2x+1+2=(x-1)^2+2>0$, το πεδιο ορισμου της f ειναι το $A=\mathbb{R}-\{0\}$.

Εχει νοημα λοιπον η αναζητηση του οριου της f στο $+\infty$.

Εχουμε $f(x)=(x^2-2x+3)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(x^2-2x+3)}{x}}$, $x\neq 0$.

Θα βρουμε αρχικα το οριο της συναρτησης $g(x)=\dfrac{\ln(x^2-2x+3)}{x}$ στο $+\infty$.

Ειναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-2x+3)=\lim\limits_{y\to+\infty}\ln y=+\infty$ (θεσαμε $y=x^2-2x+3$, οποτε αν $x\to+\infty$ τοτε και $y\to+\infty$) και $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-2x+3)}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2-2x+3}\cdot(x^2-2x+3)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

Αρα εχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x^2-2x+3)}{x}}=e^0=1$.

14 *Δινεται η συναρτηση f με $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθουν τα διαστηματα μονοτονιας της f και το ειδος μονοτονιας σε καθενα απο αυτα, καθως και τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα. Επισης να βρεθουν τα διαστηματα στα οποια η γραφικη παρασταση της f στρέφει: (α) τα κοιλα ανω , (β) τα κοιλα κατω. Ακομα να βρεθουν τα ενδεχομενα σημεια καμπης .*

Ειναι

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$, $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.

$f''(x)=6x-12=6(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$ και $f''(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Το προσημο της $f'(x)$ και της $f''(x)$ φαινεται στον πινακα που ακολουθει:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f''(x)$		-		-	0	+		+	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	
			τ.μ.		σ.κ.		τ.ε.		

- η f ειναι γ.αυξουσα στα $(-\infty,1)$, $(3,+\infty)$ και γ.φθινουσα στο $[1,3]$
- f παρουσιαζει τ.μεγιστο στο 1 το f1)=5, τ.ελαχιστο στο 3 το $f(3)=1$
- η f στρεφει τα κοιλα κατω στο $(-\infty,2)$ και ανω στο $[2,+\infty)$
- η C_f εχει σημειο καμπης το $(2, f(2))$ δηλαδη το $(2,3)$.

15 *Δινεται η συναρτηση f με $f(x)=x^2(x-3)+4$, $x\in\mathbb{R}$. Έστω x_1, x_2 ειναι τα σημεια στα οποια η f παρουσιαζει τοπικα ακροτατα και x_3 το σημειο στο οποιο παρουσιάζει καμπή . Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$, $(x_3,f(x_3))$ ειναι συνευθειακα.*

Ειναι $f(x)=x^3-3x^2+4$ και $f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=6x-6$, $x\in\mathbb{R}$.

Εχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow 3x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$.

Στις θεσεις 0 , 2 η $f'(x)$ αλλαζει προσημο αφου ειναι τριωνυμο β' βαθμου με 2 διαφορετικες ριζες. Αρα στις θεσεις $x_1=0$ και $x_2=2$ η f παρουσιαζει τοπικα ακροτατα. Ακομη $f''(x)=0\Leftrightarrow 6x-6=0\Leftrightarrow x=1$.

Στη θεση $x_3=1$ η f παρουσιαζει καμπη αφου η $f''(x)$ αλλαζει εκει προσημο.

Εχουμε $f(0)=4$, $f(2)==0$, $f(1)=2$.
Η εξισωση της ευθειας που διερχεται απο τα σημεια $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$, δηλαδη τα $(0,4)$, $(2,0)$ ειναι $y-4=\frac{0-4}{2-0}(x-0)\Leftrightarrow y=-2x+4$ (1)
Η (1) επαληθευεται απο τις συντεταγμενες του σημειου $(x_3, f(x_3))$, δηλαδη του $(1,2)$ αφου $2=-2\cdot 1+4\Leftrightarrow 2=2$, αληθες.
Αρα τα σημεια $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$, $(x_3,f(x_3))$ ειναι συνευθειακα .

16

Εστω η πραγματικη συναρτηση ψ της πραγματικης μεταβλητης x με $\psi(x)=x+\frac{4}{x}$.
α) Να βρειτε το πεδιο ορισμου της ψ .
β) Να εξετασετε την ψ ως προς τη μονοτονια .
γ) Να βρειτε το συνολο τιμων της ψ .

α)
Πρεπει $x\neq 0$, οποτε το πεδιο ορισμου της ψ ειναι το $A=\mathbb{R}-\{0\}$.
β)
Για καθε $x\neq 0$ εχουμε $\psi'(x)=(x)'+(\frac{4}{x})'=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$.
$\psi'(x)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$.
Το προσημο της ψ΄ φαινεται στον παρακατω πινακα :

x	$-\infty$ -2	0	-2	$+\infty$
$\psi'(x)$	+	-	-	+
$\psi(x)$	↗	↘	↘	↗

Η ψ ειναι γνησιως αυξουσα στα διαστηματα $(-\infty,-2]$, $[2,+\infty)$ και γνησιως φθινουσα στα $(-2,0)$, $(0,2)$.
γ)
Η ψ ειναι συνεχης στο Α και λογω της μονοτονιας της, τα επιμερους συνολα τιμων ειναι :

- $\psi((-\infty,-2])=(\lim_{x\to-\infty}\psi(x),\psi(-2)]=(-\infty,-4]$
- $\psi((-2,0))=(\lim_{x\to 0^-}\psi(x),\lim_{x\to -2^+}\psi(x))=(-\infty,-4)$
- $\psi((0,2))=(\lim_{x\to 2^-}\psi(x),\lim_{x\to 0^+}\psi(x))=(4,+\infty)$
- $\psi([2,+\infty))=[\psi(2),\lim_{x\to+\infty}\psi(x))=[4,+\infty)$.

Αρα το συνολο τιμων της ψ ειναι το
$(-\infty,-4]\cup(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)\cup[4,+\infty)=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.

17

Να βρειτε το οριο της συναρτησης $f(x)=\dfrac{\lambda^x+2^{x+1}}{2\cdot\lambda^x-3\cdot 2^{x-1}}$, για τις διαφορες τιμες του $\lambda\in(0\ ,\ +\infty)$.

Διακρινουμε τις περιπτωσεις:

- αν $\lambda\in(0,2)$ τοτε $0<\frac{\lambda}{2}<1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\lambda}{2})^x=0$, οποτε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{\lambda}{2})^x+2}{2\cdot(\frac{\lambda}{2})^x-\frac{3}{2}}=\frac{0+2}{0-\frac{3}{2}}=-\frac{4}{3}.$$

- αν $\lambda=2$ τοτε $f(x)=\dfrac{2^x+2^{x+1}}{2\cdot 2^x-3\cdot 2^{x-1}}=\dfrac{1+2}{2-\frac{3}{2}}=6$, οποτε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=6$.

- αν $\lambda>2$ τοτε $0<\frac{2}{\lambda}<1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\lambda})^x=0$, οποτε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\cdot(\frac{2}{\lambda})^x}{2-\frac{3}{2}\cdot(\frac{2}{\lambda})^x}=\frac{1+2\cdot 0}{2-\frac{3}{2}\cdot 0}=\frac{1}{2}\ .$$

18

Η συναρτηση f, ορισμενη και συνεχης στο κλειστο διαστημα $[\alpha,\beta]$, ειναι παραγωγισιμη στο ανοιχτο διαστημα (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχτει:

α) για τη συναρτηση $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$, οπου $c\notin[\alpha,\beta]$, οτι υπαρχει $c_o\in(\alpha,\beta)$ τετοιο ωστε $F'(c_o)=0$.

β) αν $c\notin[\alpha,\beta]$, οτι υπαρχει $c_o\in(\alpha,\beta)$ τετοιο ωστε η εφαπτομενη στο σημειο $(c_o,f(c_o))$ της γραμμης με εξισωση $y=f(x)$ διερχεται απο το σημειο $(c,0)$.

α)

Επειδη $c\notin[\alpha,\beta]$ η F οριζεται στο $[\alpha,\beta]$. Η F ειναι συνεχης στο $[\alpha,\beta]$ ως πη-λικο συνεχων συναρτησεων και παραγωγισιμη στο (α,β) ως πηλικο παραγωγι-σιμων συναρτησεων με $F'(x)=\dfrac{f'(x)(x-c)-f(x)(x-c)'}{(x-c)^2}=\dfrac{f'(x)(x-c)-f(x)}{(x-c)^2}$.

Ακομη $F(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha-c}=0$, $F(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta-c}=0$. Συμφωνα με το Θεωρημα του Rolle για την F υπαρχει $c_o\in(\alpha,\beta)$ τετοιο ωστε $F'(c_o)=0$.

β)

Η εξισωση της εφαπτομενης της γραμμης με εξισωση $y=f(x)$ στο σημειο $(c_o,f(c_o))$ ειναι $y-f(c_o)=f'(c_o)(x-c_o)$, οπου c_o ειναι αυτο του (α) ερωτηματος.

Ειναι $F'(c_o)=0$, οποτε $\dfrac{f'(c_o)(c_o-c)-f(c_o)}{(c_o-c)^2}=0\Leftrightarrow f'(c_o)(c_o-c)=f(c_o)$ (1)

"Η εφαπτομενη της γραμμης με εξισωση $y=f(x)$ διερχεται απ'το σημειο $(c,0)$":
$0-f(c_o)=f'(c_o)(c-c_o)\Leftrightarrow f'(c_o)(c_o-c)=f(c_o)$, αληθης λογω της (1) .

19

α) Να αποδειχθει οτι για καθε x>0 ισχυει η σχεση : $\ln x \le x-1$.

β) Εστω η συναρτηση f ορισμενη στο διαστημα $[0,+\infty)$ με

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x\ln x}{1-x}, & 0<x\neq 1\\ 0, & x=0\\ -1, & x=1\end{cases}$$

. Να αποδειχθει οτι :

i) η f ειναι συνεχης στο πεδιο ορισμου της ,

ii) ειναι φθινουσα στο διαστημα (0 , 1) και

iii) $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

α)

Θεωρουμε τη συναρτηση $g(x)=\ln x-x+1$, x>0 .Ειναι

$g'(x)=(\ln x)'-(x)'+(1)'=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$, x>0.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ και $g'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<1$, $g'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$.

Στη θεση $x_0=1$ η g παρουσιαζει ολικο μεγιστο το $g(1)=\ln 1-1+1=0$.

Ετσι για καθε x>0 θα ειναι $g(x)\le g(1) \Leftrightarrow \ln x-x+1\le 0$ οποτε $\ln x\le x-1$.

β)

i)Η f ειναι συνεχης στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ ως πηλικο συνεχων συναρτησεων.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}-1}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x}-1)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0=f(0),$$

αρα η f ειναι συνεχης στο 0. Ακομη

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{1-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}{-1}=\lim_{x\to 1}(-\ln x-1)=-\ln 1-1=-1=f(1),$$

αρα η f ειναι συνεχης στο 1. Τελικα η f ειναι συνεχης στο $[0,+\infty)$.

ii) Για καθε $x\in(0,1)$ εχουμε

$$f'(x)=\frac{(x\ln x)'(1-x)-x\ln x(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{(\ln x+1)(1-x)+x\ln x}{(1-x)^2}=\frac{\ln x-x+1}{(1-x)^2}.$$

Συμφωνα με το (α) ερωτημα για καθε x>0 : $\ln x\le x-1 \Leftrightarrow \ln x-x+1\le 0$ με το "=" να ισχυει μονο για x=1. Αρα για καθε $x\in(0,1)$: $\ln x-x+1<0$, επομενως $f'(x)<0$, δηλαδη η f ειναι γνησιως φθινουσα, αρα και φθινουσα στο (0,1).

iii) Θα χρησιμοποιησουμε τον ορισμο της παραγωγου. Εχουμε :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x\ln x}{1-x}-(-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x+1-x}{-(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x+1-x)'}{(-(x-1)^2)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{-2(x-1)(x-1)'}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{-2(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(-2(x-1))'}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$$ Αρα $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

20

Να βρεθει το οριο της συναρτησης f στο $+\infty$ με $f(x)=x^{\frac{x+1}{x}}\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Η f οριζεται στο $(0,+\infty)$, αρα εχει νοημα η αναζητηση του οριου της στο $+\infty$.

Για x>0, έχουμε $x^{\frac{x+1}{x}}=e^{\frac{x+1}{x}\ln x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+1}{x}\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=1\cdot(+\infty)=+\infty$.

Αρα $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{x+1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x+1}{x}\ln x}=+\infty$. Ακομη

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\cdot(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{2}=0.$$

Ετσι οδηγουμαστε σε απροσδιοριστη μορφη $(+\infty)\cdot0$. Οποτε:

$x^{\frac{x+1}{x}}=x^{1+\frac{1}{x}}=x\cdot x^{\frac{1}{x}}$, x>0 και εχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x\cdot x^{\frac{1}{x}}\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)]=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}[x\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}(x\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x})=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\cdot(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}=e^0\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$ αφου

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\ .$$