01 *Εστω η συναρτηση f, η οποια ειναι ορισμενη σε ενα διαστημα Δ και παραγωγιζεται στο $x_o \in \Delta$. Να αποδειξετε οτι* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_o)-x_of'(x_o)$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)+xf(x)-xf(x)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)(x-x_0)-x(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-x\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}x\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f(x_o)-x_of'(x_o),$$ αφου η f ως παραγωγισιμη στο x_o θα ειναι και συνεχης στο x_o δηλαδη $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_o)$.

02 *Να βρειτε τα διαστηματα μονοτονιας και τα ακροτατα της συναρτησης* $f:[0,\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}$ *με* $f(x)=\eta\mu^2x-\sqrt{2}\,\eta\mu x+2\sqrt{2}$.

Για καθε $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ εχουμε $f'(x)=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x(2\eta\mu x-\sqrt{2})$ και

$f'(x)=0\Leftrightarrow(\sigma\upsilon\nu x=0$ ή $2\eta\mu x-\sqrt{2}=0)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ ή $x=\frac{\pi}{4}$.

Αφου η f' συνεχης θα εχει σταθερο προσημο στα διαστηματα $[0,\frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$.

Υπολογιζουμε τις τιμες: $f'(\frac{\pi}{6})=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}(2\eta\mu\frac{\pi}{6}-\sqrt{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}(2\frac{1}{2}-\sqrt{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\sqrt{2})<0$,

$f'(\frac{\pi}{3})=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}(2\eta\mu\frac{\pi}{3}-\sqrt{2})=\frac{1}{2}(2\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2})=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})>0$.

Το προσημο της f' φαινεται στον πινακα που ακολουθει:

x	0 π/4	π/2
f'(x)	-	+
f(x)	↘	↗
	ο.μ. ο.ε.	τ.μ.

Ετσι

- η f ειναι γνησιως φθινουσα στο $[0,\frac{\pi}{4})$
- η f ειναι γνησιως αυξουσα στο $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$
- η f παρουσιαζει ολικο ελαχιστο στο $\frac{\pi}{4}$, το $f(\frac{\pi}{4})=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}=-\frac{1}{2}+2\sqrt{2}$
- η f παρουσιαζει τοπικο μεγιστο στο $\frac{\pi}{2}$, το $f(\frac{\pi}{2})=1^2-\sqrt{2}\cdot1+2\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$
- η f παρουσιαζει ολικο μεγιστο στο 0 το $f(0)=0^2-\sqrt{2}\cdot0+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}>1+\sqrt{2}=f(\frac{\pi}{2})$.

03

Δινονται οι συναρτησεις f και g, οι οποιες εχουν τις εξης ιδιοτητες :
(i) ειναι συνεχεις στο $[α, β]$ και παραγωγισιμες στο $(α, β)$,
(ii) για καθε $x \in [α, β]$ ειναι $g(x) \neq 0$ και
(iii) $f(β)g(α)-f(α)g(β)=0$.
Να αποδειξετε οτι :

α) για την συναρτηση F με $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμοζεται το θεωρημα του Rolle στο $[α, β]$.

β) υπαρχει $x_o \in (α, β)$ τετοιο ωστε $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

α)
Η F ειναι ορισμενη στο $[α,β]$ αφου για καθε $x\in[α,β]$ ειναι $g(x)\neq 0$, συνεχης στο $[α,β]$ ως πηλικο συνεχων συναρτησεων και παραγωγισιμη στο $(α,β)$ ως πηλικο παραγωγισιμων συναρτησεων. Ακομη

$$f(β)g(α)-f(α)g(β)=0 \Leftrightarrow f(β)g(α)=f(α)g(β) \Leftrightarrow \frac{f(β)}{g(β)}=\frac{f(α)}{g(α)} \Leftrightarrow F(β)=F(α).$$

Ισχυουν οι προυποθεσεις του θεωρηματος Rolle και συνεπως αυτο εφαρμοζεται στο $[α,β]$.

β)
Συμφωνα με το θεωρημα του Rolle για την συναρτηση F στο $[α,β]$ θα υπαρχει $x_o\in(α,β)$ τετοιο ωστε $F'(xo)=0$. Ομως $F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$. Ετσι

$$F'(x_o)=0 \Leftrightarrow f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)=0 \Leftrightarrow f'(x_o)g(x_o)=f(x_o)g'(x_o) \Leftrightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

04

α) Δινεται η παραγωγισιμη συναρτηση f με $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρειτε την παραγωγο της συναρτησης F με $F(x)=[f(x)]^x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Εστω $α>0$. Να βρειτε την παραγωγο της συναρτησης g με $g(x)=α^{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

α)
Ειναι $F(x)=[f(x)]^x=e^{x\ln f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$. Αρα

$$F'(x)=e^{x\ln f(x)}\cdot(x\ln f(x))'=e^{x\ln f(x)}\cdot\left(1\cdot\ln f(x)+x\frac{f'(x)}{f(x)}\right)=[f(x)]^x\cdot\left(\ln f(x)+x\frac{f'(x)}{f(x)}\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

β)

$$\text{Ειναι } g'(x)=α^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\ln α\cdot(\sqrt{x^2+1})'=α^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\ln α\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'=α^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\ln α\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}.$$

05

Αν $I_ν=\int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^ν x dx$ *, ν∈*$\mathbb{N}^*$*, τοτε*

α) να αποδειξετε οτι για καθε ν>2 , ισχυει $I_ν = \frac{1}{ν-1} - I_{ν-2}$

β) να υπολογισετε το I_5 *.*

α)

$$I_ν=\int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^{ν-2}x\cdot εφ^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^{ν-2}x\cdot\left(\frac{1}{συν^2x}-1\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^{ν-2}x\cdot\frac{1}{συν^2x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^{ν-2}x dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^{ν-2}x\cdot(εφx)'dx-I_{ν-2}=\left[\frac{εφ^{ν-1}x}{ν-1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I_{ν-2}=\frac{1}{ν-1}-0-I_{ν-2}=\frac{1}{ν-1}-I_{ν-2},\text{ για καθε } ν>2\ .$$

β)

Συμφωνα με το (α) ειναι

$$I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}} εφ^5 x dx=\frac{1}{5-1}-I_{5-2}=\frac{1}{4}-I_3=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3-1}-I_{3-2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+I_1=-\frac{1}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}} εφx dx=-\frac{1}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{ημx}{συνx}dx=$$

$$=-\frac{1}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(συνx)'}{συνx}dx=-\frac{1}{4}-[\ln(συνx)]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{4}-\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln 1\right)=-\frac{1}{4}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

06

Δινεται η συναρτηση f με τυπο $f(x)=\begin{cases} e^x-e, & x<1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$.

Να αποδειξετε οτι η f ειναι συνεχης και να υπολογισετε το εμβαδον του χωριου, το οποιο περικλειεται απο τη γραφικη παρασταση της f, τον αξονα x΄x και τις ευθειες με εξισωσεις x=0 και x=e .

Η f ειναι συνεχης στα $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$ ως διαφορα συνεχων συναρτησεων και πηλικο συνεχων συναρτησεων αντιστοιχα .Ειναι ακομη:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(e^x-e)=e-e=0,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}=\frac{\sqrt{\ln 1}}{1}=0,\ f(1)=\frac{\sqrt{\ln 1}}{1}=0\ ,$$

αρα $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$. Συνεπως η f ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.

Για καθε $x\in[0,1)$ ειναι $e^x<e^1 \Rightarrow e^x-e<0 \Rightarrow f(x)<0$ και για καθε $x\in[1,e]$ ειναι $f(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\geq 0$.Το ζητουμενο εμβαδο ειναι

$$E=\int_0^1 -f(x)dx+\int_1^e f(x)dx=\int_0^1 (e-e^x)dx+\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx=[ex-e^x]_0^1+\int_1^e (\ln x)^{\frac{1}{2}}(\ln x)'dx=$$

$$=[ex-e^x]_0^1+\left[\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^e=(e-e)-(0-1)+\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot 0=\frac{5}{3}\ \text{τ.μ.}$$

07

Δινεται η συναρτηση f με τυπο $f(x)=\sqrt{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, x>0 .

α) Να βρειτε τα διαστηματα μονοτονιας της f .

β) Να υπολογισετε το εμβαδον του χωριου το οποιο περικλειεται απο τη γραφικη παρασταση της f , τον αξονα Ox και τις ευθειες με εξισωσεις x=1 και x=4 .

α)

Για καθε x>0 εχουμε $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x}-\ln x\cdot 2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}=\frac{2x-2+\ln x}{4x\sqrt{x}}$.

Εστω $g(x)=2x-2+\ln x$, x>0 .

Παρατηρουμε οτι $g(1)=0$.

Ακομη $g'(x)=2+\frac{1}{x}>0$, για κάθε x>0, αρα η g ειναι γνησιως αυξουσα και συνεπως η εξισωση $g(x)=0$ εχει μοναδικη ριζα την x=1. Ετσι $f'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Η g ειναι συνεχης επομενως εχει σταθερο προσημο στα διαστηματα (0,1) και $(1,+\infty)$.

Εχουμε $g(2)=2+\ln 2>0$ και $g(\frac{1}{2})=-1+\ln\frac{1}{2}=-1-\ln 2<0$.Επομενως:

$f'(x)>0 \Leftrightarrow g(x)>0 \Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow g(x)<0 \Leftrightarrow x\in(0,1)$, αρα η f ειναι γνησιως αυξουσα στο $[1,+\infty)$ και γνησιως φθινουσα στο (0,1).

β)

Η f ειναι συνεχης και γνησιως αυξουσα στο [1,4], οποτε για καθε $x\in[1,4]$

$f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow f(x)\geq\sqrt{1}-\frac{\ln 1}{2\sqrt{1}} \Leftrightarrow f(x)\geq 1$, αρα $f(x)>0$. Το ζητουμενο εμβαδον ειναι:

$$E=\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\sqrt{x}dx-\int_1^4\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx=\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^4-\int_1^4\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx=[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_1^4-\int_1^4\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx.$$

Θετουμε $\sqrt{x}=y$, οποτε για x=1 παιρνουμε y=1 και για x=4 παιρνουμε y=2 .

Ακομη $\sqrt{x}=y \Rightarrow x=y^2 \Rightarrow dx=2ydy$. Ετσι

$$\int_1^4\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx=\int_1^2\frac{\ln y^2}{2y}2ydy=\int_1^2 2\ln y dy=\int_1^2(2y)'\ln y dy=[2y\ln y]_1^2-\int_1^2 2y\frac{1}{y}dy=[2y\ln y]_1^2-[2y]_1^2=$$
$$=4\ln 2-2\ln 1-(4-2)=4\ln 2-2.$$ Αρα

$$E=[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_1^4-(4\ln 2-2)=\frac{20}{3}-4\ln 2 \text{ τ.μ.}$$