01

Δινεται η συναρτηση $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+3x+\mu$, $x\in\mathbb{R}$, οπου μ ειναι πραγματικος αριθμος . Να αποδειξετε οτι η εξισωση $f(x)=0$ δεν μπορει να εχει δυο διαφορετικες ριζες στο ανοικτο διαστημα (1 , 2) .

Είναι $f'(x)=2x^2-7x+3$, $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ή $x=3$.

Επειδη 2>0 θα ειναι $2x^2-7x+3<0$ για καθε $x\in(\frac{1}{2},3)$, επομενως η f ειναι γνησιως φθινουσα στο $(\frac{1}{2},3)$, αρα και στο $(1,2)\subset(\frac{1}{2},3)$.

Η $f(x)=0$ εχει συνεπως το πολυ μια ριζα στο (1,2) αρα δεν μπορει να εχει δυο διαφορετικες ριζες στο ανοικτο διαστημα (1,2) .

02

Δινεται η συναρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}+4$ με $x>0$.

α) Να εξετασετε τη μονοτονια της συναρτησης f .

β) Να υπολογισετε το $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt$.

α)

Ειναι $f'(x)=\frac{(1)'\sqrt{1+x^4}-1(\sqrt{1+x^4})'}{(\sqrt{1+x^4})^2}+0=\frac{-2x^3}{(\sqrt{1+x^4})^3}<0$, για καθε $x>0$.

Αρα η f ειναι γνησιως φθινουσα στο $(0,+\infty)$.

β)

Για καθε $t\in[x,x+1]$ με $x>0$ εχουμε:

$$0<\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}<\frac{1}{\sqrt{t^4}}\Rightarrow 0+4<\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}+4<\frac{1}{t^2}+4\Rightarrow 4<f(t)<\frac{1}{t^2}+4 .$$

• $4<f(t)\Rightarrow f(t)-4>0\Rightarrow\int_x^{x+1}(f(t)-4)dt>0\Rightarrow\int_x^{x+1}f(t)dt-\int_x^{x+1}4dt>0\Rightarrow\int_x^{x+1}f(t)dt-4(x+1-x)>0\Rightarrow$

$\int_x^{x+1}f(t)dt>4$ (1)

• $f(t)<\frac{1}{t^2}+4\Rightarrow\frac{1}{t^2}+4-f(t)>0\Rightarrow\int_x^{x+1}(\frac{1}{t^2}+4-f(t))dt>0\Rightarrow\int_x^{x+1}\frac{1}{t^2}dt+\int_x^{x+1}4dt-\int_x^{x+1}f(t)dt>0\Rightarrow$

$[-\frac{1}{t}]_x^{x+1}+4(x+1-x)-\int_x^{x+1}f(t)dt>0\Rightarrow-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}+4>\int_x^{x+1}f(t)dt$. (2)

Απο τις (1) , (2) προκυπτει: $4<\int_x^{x+1}f(t)dt<-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}+4$.

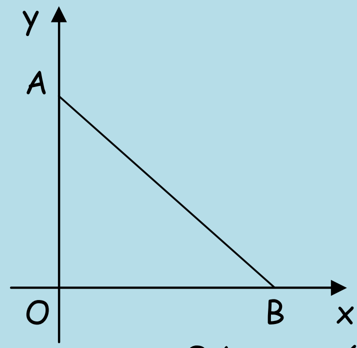
Επειδη $\lim_{x\to+\infty}4=4$ και $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}+4)=-0+0+4=4$ θα ειναι και $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt=4$.

03 Δινεται η ορθη γωνια xOy και το ευθυγραμμο τμημα ΑΒ μηκους 10 m του οποιου τα ακρα Α και Β ολισθαινουν πανω στις πλευρες Oy και Ox αντιστοιχως. Το σημειο Β κινειται με σταθερη ταχυτητα υ=2 m/sec και η θεση του πανω στον αξονα Ox δινεται απο τη συναρτηση $s(t)=υt$, $t\in[0,5]$ οπου t ο χρονος (σε sec).

α) Να βρεθει το εμβαδο E(t) του τριγωνου ΑΟΒ ως συναρτηση του χρονου .

β) Ποιος ειναι ο ρυθμος μεταβολης του εμβαδου E(t) τη στιγμη κατα την οποια το μηκος του τμηματος ΟΑ ειναι 6m ;

α)



Για $t\in[0,5]$ εχουμε $OB=s(t)=υt=2t$,

$OA^2+OB^2=AB^2 \Rightarrow OA=\sqrt{AB^2-OB^2} \Rightarrow OA=\sqrt{100-4t^2}$,

οποτε $E(t)=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\sqrt{100-4t^2}\cdot 2t=t\sqrt{100-4t^2} \Rightarrow$

$E(t) = 2t\sqrt{25-t^2}$, $t\in[0\ ,\ 5]$.

β)

Θα βρουμε πρωτα ποια χρονικη στιγμη το μηκος του τμηματος ΟΑ ειναι 6m :

$OA=6 \Leftrightarrow \sqrt{100-4t^2}=6 \Leftrightarrow 100-4t^2=36 \Leftrightarrow t^2=16 \Leftrightarrow t = 4$ sec .

Για καθε $t\in(0,5)$ εχουμε

$$E'(t)=(2t)'\sqrt{25-t^2}+2t(\sqrt{25-t^2})'=2\sqrt{25-t^2}+2t\frac{1}{2\sqrt{25-t^2}}(-2t)=\frac{2(25-2t^2)}{\sqrt{25-t^2}} .$$

Αρα ο ζητουμενος ρυθμος μεταβολης ειναι:

$$E'(4)=\frac{2(25-2\cdot 4^2)}{\sqrt{25-4^2}}=-\frac{14}{3}\ m^2/sec .$$

04 Να βρεθει η συνεχης συναρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποια ισχυει :

$\int_α^x e^{-t}f(t)dt = e^{-x}-e^{-α} - e^{-x}f(x)$ με x , $α\in\mathbb{R}$.

Απο τη δοσμενη ισοτητα παιρνουμε:

$$e^x\cdot\int_α^x e^{-t}f(t)dt=1-e^{x-α}-f(x) \Leftrightarrow f(x)=1-e^{x-α}-e^x\cdot\int_α^x e^{-t}f(t)dt \quad (1)$$

Η συναρτηση $e^x\cdot\int_α^x e^{-t}f(t)dt$ ειναι παραγωγισιμη ως γινομενο παραγωγισιμων συναρτησεων, επομενως λογω της (1), η f(x) ειναι παραγωγισιμη ως αθροισμα παραγωγισιμων συναρτησεων.

Απο την δοσμενη ισοτητα, παραγωγιζοντας και τα δυο μελη ως προς x, ειναι:

$e^{-x}f(x)=-e^{-x}+e^{-x}f(x)-e^{-x}f'(x) \Leftrightarrow e^{-x}f'(x)=-e^{-x} \Leftrightarrow f'(x)=-1 \Leftrightarrow f'(x)=(-x)' \Leftrightarrow$

$f(x)=-x+c$, οπου c πραγματικη σταθερα.

Ομως απο την (1): $f(α)=1-e^0-e^x\cdot 0=0$.

Ακομη $f(α)=-α+c \Leftrightarrow 0=-α+c \Leftrightarrow c=α$.

Η ζητουμενη συναρτηση ειναι η $f(x)=-x+α$, $x\in\mathbb{R}$.

05

Αν η συναρτηση g εχει συνεχη παραγωγο στο κλειστο διαστημα [0,1] και ι-κανοποιει τη σχεση $\int_0^1 xg'(x)dx = 1993 - \int_0^1 g(x)dx$, να βρειτε την τιμη της συν-αρτησης g για x = 1.

Η δοσμενη ισοτητα γραφεται

$$\int_0^1 (xg'(x)+g(x))dx = 1993 \Leftrightarrow [xg(x)]_0^1 = 1993 \Leftrightarrow 1\cdot g(1) - 0\cdot g(0) = 1993 \Leftrightarrow g(1) = 1993 .$$

06

Δινεται η συναρτηση $f(x)=xe^{-vx}$, $x\in\mathbb{R}$ οπου v μη μηδενικος φυσικος αριθμος.

Α) Να μελετησετε τη μονοτονια της f και να βρειτε τα ακροτατα και τα ση-μεια καμπης της

Β) Να αποδειξετε οτι: $2 \le e^2 v^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} xe^{-vx}dx \le e$.

Α)

Για καθε $x\in\mathbb{R}$ ειναι :

$f'(x)=(x)'e^{-vx}+x(e^{-vx})'=e^{-vx}(1-vx)$ και

$f''(x)=[e^{-vx}(1-vx)]'=(e^{-vx})'(1-vx)+e^{-vx}(1-vx)'=-ve^{-vx}(1-vx)-ve^{-vx}=ve^{-vx}(vx-2)$.

Εχουμε: $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-vx}(1-vx)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{v}$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow ve^{-vx}(vx-2)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{v}$.

Τα προσημα των f΄(x) και f΄΄(x) φαινονται στον πινακα που ακολουθει:

x	$-\infty$	1/v		2/v		$+\infty$
f΄(x)	+	0	-		-	
f΄΄(x)	-		-	0	+	
f(x)	↗		↘		↘	
		ο.μ.		σ.κ.		

Η f ειναι γνησιως αυξουσα στο $(-\infty,\frac{1}{v})$, γνησιως φθινουσα στο $[\frac{1}{v},+\infty)$ ενω

παρουσιαζει ολικο μεγιστο στη θεση $\frac{1}{v}$ το $f(\frac{1}{v})=\frac{1}{v}e^{-v\frac{1}{v}}=\frac{1}{ve}$.

Η C_f εχει σημειο καμπης το $(\frac{2}{v}, f(\frac{2}{v}))$ δηλαδη το $(\frac{2}{v}, \frac{2}{ve^2})$.

Β)

Απο το (Α) γνωριζουμε οτι η f ειναι γνησιως φθινουσα στο $[\frac{1}{v},\frac{2}{v}]$, αρα για

καθε $x\in[\frac{1}{v},\frac{2}{v}]$ ειναι : $\frac{1}{v} \le x \le \frac{2}{v} \Rightarrow f(\frac{1}{v}) \ge f(x) \ge f(\frac{2}{v}) \Rightarrow \frac{1}{ve} \ge f(x) \ge \frac{2}{ve^2}$.

• Απ΄την $\frac{1}{ve} \ge f(x) \Rightarrow \frac{1}{ve} - f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}}(\frac{1}{ve} - f(x))dx \ge 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}}\frac{1}{ve}dx - \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}}f(x)dx \ge 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{ve}\left(\frac{2}{v}-\frac{1}{v}\right) \geq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x)dx \Rightarrow \frac{1}{v^2 e} \geq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x)dx .$$

• Απ'την $f(x) \geq \frac{2}{ve^2} \Rightarrow f(x)-\frac{2}{ve^2} \geq 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} (f(x)-\frac{2}{ve^2})dx \geq 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x)dx \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \frac{2}{ve^2}dx \geq 0 \Rightarrow$

$$\int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x)dx \geq \frac{2}{ve^2}\left(\frac{2}{v}-\frac{1}{v}\right) \Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x)dx \geq \frac{2}{v^2 e^2} .$$

Αρα $\frac{2}{v^2e^2} \leq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x)dx \leq \frac{1}{v^2 e} \Rightarrow \frac{2}{v^2e^2} \leq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} xe^{-vx}dx \leq \frac{1}{v^2 e} \Rightarrow 2 \leq e^2 v^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} xe^{-vx}dx \leq e$.