Πανελλαδικες Εξετασεις (1994)

01

Αν η συναρτηση f ειναι παραγωγισιμη στο διαστημα [1 , e] με $0<f(x)<1$ και $f'(x)\geq 0$ για καθε $x\in[1, e]$, να αποδειχθει οτι υπαρχει μονο ενας αριθμος $x_o\in(1, e)$ τετοιος ωστε $f(x_o) + x_o\ln x_o = x_o$.

Θεωρουμε τη συναρτηση $g(x)=f(x)+x\ln x-x$, $x\in[1, e]$ και αρκει να δειξουμε οτι η εξισωση $g(x)=0$ εχει μια ακριβως ριζα στο (1 , e) .

• Η f ειναι συνεχης στο [1,e] αφου ειναι παραγωγισιμη σε αυτο, αρα η g ειναι συνεχης στο [1,e] ως αθροισμα συνεχων συναρτησεων .

• $g(1)g(e)=(f(1)-1)(f(e)+e-e)=f(e)(f(1)-1)<0$,αφου $0<f(x)<1$ για καθε $x\in[1,e]$.
Συμφωνα με το θεωρημα Bolzano η εξισωση $g(x)=0$ εχει μια τουλαχιστον ριζα στο (1,e). Ειναι

$g'(x)=f'(x)+\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=f'(x)+\ln x>0$, για καθε $x\in(1,e)$, αφου για τις τιμες αυτες του x ειναι $f'(x)\geq 0$ και $\ln x>\ln 1=0$. Η g ειναι γνησιως αυξουσα στο (1,e) επομενως η εξισωση $g(x)=0$ εχει το πολυ μια ριζα στο (1,e) .

Τελικα υπαρχει μονο ενας αριθμος $x_o\in(1,e)$ τετοιος ωστε
$g(x_o)=0\Leftrightarrow f(x_o)+x_o\ln x_o-x_o=0\Leftrightarrow f(x_o)+x_o\ln x_o=x_o$.

02

Δινεται ο θετικος πραγματικος αριθμος α και η συναρτηση $f(x)=ax^2-2x\ln x$ με $x\in(0, +\infty)$.

α) Να βρειτε τα διαστηματα στα οποια η f ειναι κυρτη ή κοιλη .

β) Να βρειτε την εξισωση της εφαπτομενης της γραφικης παραστασης της συναρτησης f στο σημειο A(1 , f(1)) και να προσδιορισετε το α , ωστε η εφαπτομενη αυτη να διερχεται απο την αρχη των αξονων .

α)

Για καθε x>0 εχουμε:

$f'(x)=2\alpha x-2\ln x-2$ και $f''(x)=2\alpha-\frac{2}{x}=\frac{2(\alpha x-1)}{x}$.

• $f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{2(\alpha x-1)}{x}=0\Leftrightarrow \alpha x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha}$

• $f''(x)>0\ \frac{2(\alpha x-1)}{x}>0\Leftrightarrow \alpha x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{\alpha}$

• $f''(x)<0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\alpha}$.

Αρα η f ειναι κυρτη στο $[\frac{1}{\alpha},+\infty)$ και κοιλη στο $(0, \frac{1}{\alpha})$.

β)

Η ζητουμενη εξισωση ειναι : $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ (1).

Ειναι $f(1)=\alpha$ και $f'(1)=2\alpha-2$ και συνεπως η (1) γραφεται :

$y-\alpha=(2\alpha-2)(x-1\Leftrightarrow y=2(\alpha-1)x+2-\alpha$.

Η εφαπτομενη αυτη διερχεται απο την αρχη των αξονων αν και μονο αν
$0=2(\alpha-1)0+2-\alpha\Leftrightarrow\alpha=2$.

03

Εστω ρ πραγματικος αριθμος, A(x), B(x) πολυωνυμα με πραγματικους συντελεστες, ωστε $B(\rho)\neq 0$ και το A(x) εχει βαθμο μεγαλυτερο ή ισο του 2 .

α) Να αποδειξετε οτι υπαρχει πολυωνυμο f(x), τέτοιο ωστε $A(x)B(x)=(x-\rho)^2 f(x)$, αν και μονο αν $A(\rho)=A'(\rho)=0$.

β) Εστω ν ακεραιος μεγαλυτερος ή ισος του 1. Να βρειτε τις τιμες των κ,λ για τις οποιες το πολυωνυμο $Q(x)=x^\nu(\nu x^3+\kappa x^2+\lambda x+8)$ εχει παραγοντα το $(x-2)^2$.

α)

Εστω οτι υπαρχει πολυωνυμο f(x), τετοιο ωστε $A(x)B(x)=(x-\rho)^2 f(x)$ (1)

Παραγωγιζοντας τα δυο μελη της (1) παιρνουμε:

$A'(x)B(x)+A(x)B'(x)=2(x-\rho)f(x)+(x-\rho)^2 f'(x)\overset{x=\rho}{\Rightarrow} A'(\rho)B(\rho)+A(\rho)B'(\rho)=0$ (2)

Απο την (1) για $x=\rho$ παιρνουμε $A(\rho)B(\rho)=0 \overset{B(\rho)\neq 0}{\Rightarrow} A(\rho)=0$.

Ετσι η (2) γραφεται

$A'(\rho)B(\rho)=0 \overset{B(\rho)\neq 0}{\Rightarrow} A'(\rho) = 0$.

<u>Αντιστροφα:</u>

Εστω οτι $A(\rho)=A'(\rho)=0$ οπου A(x) πολυωνυμο βαθμου $\nu\geq 2$. Επειδη $A(\rho)=0$, υπαρχει πολυωνυμο π(x) βαθμου ν-1 τετοιο ωστε $A(x)= (x-\rho)\pi(x)$ (3) .

Παραγωγιζοντας τα δυο μελη της (3) παιρνουμε: $A'(x)=\pi(x)+(x-\rho)\pi'(x)$, οποτε για $x=\rho$ ειναι $A'(\rho)=\pi(\rho) \overset{A'(\rho)=0}{\Rightarrow} \pi(\rho)=0$.

Αρα υπαρχει πολυωνυμο φ(x) βαθμου ν-2 τετοιο ωστε $\pi(x)=(x-\rho)\varphi(x)$ (4) .

Απο τις (3) , (4) παιρνουμε

$A(x)=(x-\rho)^2\varphi(x)\Rightarrow A(x)B(x)=(x-\rho)^2\varphi(x)B(x)\Rightarrow A(x)B(x)=(x-\rho)^2 f(x)$, οπου $f(x)=\varphi(x)B(x)$.

β)

Ειναι $Q(x)=A(x)B(x)$, οπου $A(x)=\nu x^3+\kappa x^2+\lambda x+8$ και $B(x)=x^\nu$, με το A(x) να ειναι βαθμου $3\geq 2$ και $B(2)= 2^\nu\neq 0$.

Συμφωνα με το (α) ερωτημα αρκει να βρουμε τα κ , λ ωστε να ισχυουν : $A(2)=0$ και $A'(2)=0$.

Εχουμε $A'(x)=3\nu x^2+2\kappa x+\lambda$. Ετσι

$$\begin{cases} A(2)=0 \\ A'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\nu+4\kappa+2\lambda+8=0 \\ 12\nu+4\kappa+\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=-4\nu+2 \\ \lambda=4\nu-8 \end{cases} .$$

04

Να αποδειξετε οτι :

α) $e^x-x+1>0$, για καθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $2e^x+2x = x^2+2$ εχει ακριβως μια λυση , την $x=0$.

α)

Θεωρουμε τη συναρτηση $\varphi(x)=e^x-x+1$, $x\in\mathbb{R}$, παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x)=e^x-1$

- $\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0$
- $\varphi'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$
- $\varphi'(x)<0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<0$.

Αρα η φ παρουσιαζει ολικο ελαχιστο στη θεση 0 το $\varphi(0)=2$,
συνεπως για καθε $x\in\mathbb{R}$ ειναι $\varphi(x)\geq\varphi(0) \Rightarrow e^x-x+1\geq 2 \Rightarrow e^x-x+1>0$.

β)

Η εξισωση $2e^x+2x=x^2+2$ επαληθευεται για $x=0$.
Ακομη εχουμε: $2e^x+2x=x^2+2 \Leftrightarrow 2e^x+2x-x^2-2=0$ (1) .
Αρκει να δειξω οτι η (1) εχει το πολυ μια ριζα .
Θεωρουμε τη συναρτηση $f(x)=2e^x+2x-x^2-2$ και για καθε $x\in\mathbb{R}$ ειναι :
$f'(x)=2e^x+2-2^x=2(e^x-x+1)>0$, λογω του (α), οποτε η f ειναι γν. αυξουσα στο $\mathbb{R}$
και συνεπως η (1) εχει το πολυ μια ριζα.
Τελικα η εξισωση $2e^x+2x=x^2+2$ εχει ακριβως μια λυση, την $x=0$.

05

Εστω μια συναρτηση f ορισμενη στο $\mathbb{R}$, η οποια εχει συνεχη f'' στο $\mathbb{R}$, παρουσιαζει τοπικο ακροτατο στο σημειο $x_o=2$ και η γραφικη της παρασταση διερχεται απο το σημειο $A(0,1)$.

Αν ισχυει $\int_0^2 [x\cdot f''(x)+3\cdot f'(x)]dx = -\frac{8}{3}$, να υπολογισετε το $f(2)$.

Επειδη η f παρουσιαζει τοπικο ακροτατο στο $x_o=2$ και ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ θα ειναι $f'(2)=0$.
Ακομη η C_f διερχεται απο το σημειο $A(0,1)$ αρα $f(0)=1$.
Εχουμε :

$$\int_0^2 [x\cdot f''(x)+3\cdot f'(x)]dx=-\frac{8}{3} \Rightarrow \int_0^2 x\cdot f''(x)dx+3\int_0^2 f'(x)dx=-\frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$[xf'(x)]_0^2-\int_0^2 (x)'\cdot f'(x)dx+3(f(2)-f(0))=-\frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$2f'(2)-0-\int_0^2 f'(x)dx+3(f(2)-f(0))=-\frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$2f'(2)-(f(2)-f(0))+3(f(2)-f(0))=-\frac{8}{3} \overset{f(0)=1,f'(2)=0}{\Rightarrow}$$

$$2(f(2)-1)=-\frac{8}{3} \Rightarrow f(2)=-\frac{1}{3} .$$

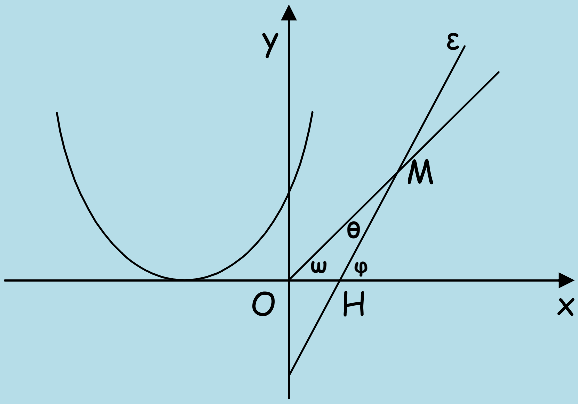
06

Δινεται η συναρτηση $f(x)=2x^2$, $x\in\mathbb{R}$.
Α) Αν ε ειναι η εφαπτομενη της γραφικης παραστασης C της συναρτησης f στο σημειο $M(2\alpha , 8\alpha^2)$, $\alpha>0$, να βρειτε το εμβαδον του χωριου που περικλειεται απο τη C , την ευθεια ε και τον αξονα y΄y .
Β) Εστω θ η οξεια γωνια που σχηματιζει η ε με την ευθεια ΜΟ , οπου Ο ειναι η αρχη των αξονων . Να εκφρασετε την εφθ ως συναρτηση του α και να βρειτε την μεγιστη τιμη της εφθ οταν το α μεταβαλλεται ($\alpha>0$) .

Α)
Η f ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x$, αρα $f'(2\alpha)=8\alpha$, οποτε η εξισωση της εφαπτομενης ε της C στο Μ ειναι
$y-f(2\alpha)=f'(2\alpha)(x-2\alpha)\Leftrightarrow y-8\alpha^2=8\alpha(x-2\alpha)\Leftrightarrow y=8\alpha x-8\alpha^2$.
Ειναι $f(x)-(8\alpha x-8\alpha^2)=2x^2-8\alpha x+8\alpha^2=2(x-2\alpha)^2\geq 0$, για καθε $x\in\mathbb{R}$, με το "=" να ισχυει μονο για $x=2\alpha$ και επειδη οι συναρτησεις $f(x)$ και $8\alpha x-8\alpha^2$ ειναι συνεχεις στο $[0,2\alpha]$ το εμβαδον του χωριου που περικλειεται απο τη C, την ευθεια ε και τον αξονα y΄y ειναι :

$$E=\int_0^{2\alpha}2(x-2\alpha)^2dx=\left[\frac{2}{3}(x-2\alpha)^3\right]_0^{2\alpha}=$$

$$=0-\frac{2}{3}(-2\alpha)^3=\frac{16}{3}\alpha^3 \text{ τ.μ.}$$



Β)
Απο το τριγωνο ΟΗΜ εχουμε

$$\varphi=\omega+\theta\Rightarrow\theta=\varphi-\omega\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta=\varepsilon\varphi(\varphi-\omega)\Rightarrow\varepsilon\varphi\theta=\frac{\varepsilon\varphi\varphi-\varepsilon\varphi\omega}{1+\varepsilon\varphi\varphi\cdot\varepsilon\varphi\omega}\Rightarrow\varepsilon\varphi\theta=\frac{\lambda_\varepsilon-\lambda_{OM}}{1+\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{OM}}\Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{8\alpha-4\alpha}{1+8\alpha\cdot4\alpha}\Rightarrow\varepsilon\varphi\theta=\frac{4\alpha}{1+32\alpha^2}$$, αφου $\lambda_\varepsilon=f'(2\alpha)=8\alpha$ και $\lambda OM=\frac{8\alpha^2-0}{2\alpha-0}=4\alpha$.

Θεωρουμε τη συναρτηση $g(\alpha)=\frac{4\alpha}{1+32\alpha^2}$, $\alpha>0$ και εχουμε :

- $g'(\alpha)=\frac{(4\alpha)'(1+32\alpha^2)-4\alpha(1+32\alpha^2)'}{(1+32\alpha^2)^2}=\frac{4(1+32\alpha^2)-4\alpha\cdot64\alpha}{(1+32\alpha^2)^2}=\frac{4(1-32\alpha^2)}{(1+32\alpha^2)^2}$
- $g'(\alpha)=0\Leftrightarrow\frac{4(1-32\alpha^2)}{(1+32\alpha^2)^2}=0\Leftrightarrow 1-32\alpha2=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{\sqrt{2}}{8}$.
- $g'(\alpha)>0\Leftrightarrow\frac{4(1-32\alpha^2)}{(1+32\alpha^2)^2}>0\Leftrightarrow 1-32\alpha2>0\Leftrightarrow\alpha\in(0,\frac{\sqrt{2}}{8})$
- $g'(\alpha)<0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\alpha>\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Επομενως η g παρουσιαζει ολικο μεγιστο στη θεση $\frac{\sqrt{2}}{8}$ το $g(\frac{\sqrt{2}}{8})=\frac{\sqrt{2}}{4}$,δηλαδη η μεγιστη τιμη της εφθ ειναι $\frac{\sqrt{2}}{4}$.