01

Αν $G(x)=\int_1^x f(t)dt$, οπου $f(t)=\int_1^{3t}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$ και $x>0$, $t>0$ να βρειτε :

α) την $G''(1)$ *β) το $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}G''(x)-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}$*

α)

Η f ειναι παραγωγισιμη (αρα και συνεχης) με $f'(t)=\frac{e^{3t}}{\sqrt{3t}}(3t)'=\frac{\sqrt{3}e^{3t}}{\sqrt{t}}$, $t>0$.

Επειδη η f ειναι συνεχης, η G ειναι παραγωγισιμη με $G'(x)=f(x)$, $x>0$.

Ακομη $G''(x)=f'(x)=\frac{\sqrt{3}e^{3x}}{\sqrt{x}}$, $x>0$, επομενως $G''(1)=\frac{\sqrt{3}e^3}{\sqrt{1}}=\sqrt{3}e^3$.

β)

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{\sqrt{x}G''(x)-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\sqrt{x}\frac{\sqrt{3}e^{3x}}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\sqrt{3}e^{3x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{Hospital}}{=}}\lim_{x\to x_0^+}\frac{(\sqrt{3}e^{3x}-\sqrt{3})'}{(\sqrt{x+1}-1)'}=$$

$$=\lim_{x\to x_0^+}\frac{3\sqrt{3}e^{3x}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\lim_{x\to x_0^+}(6\sqrt{3}e^{3x}\sqrt{x+1})=6\sqrt{3}e^0\sqrt{1}=6\sqrt{3}.$$

02

Να βρειτε τη συναρτηση $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ με συνεχη δευτερη παραγωγο για την οποια ισχυουν : $f(0)=1995$, $f'(0)=1$, $1+\int_0^x f''(t)συνt\,dt=συν^2x+\int_0^x f'(t)ημt\,dt$.

Παραγωγιζοντας τα δυο μελη της δοσμενης ισοτητας με τα ολοκληρωματα εχουμε:

$0+f''(x)συνx=(συν^2x)'+f'(x)ημx\Rightarrow f''(x)συνx+f'(x)(συνx)'=(συν^2x)'\Rightarrow$

$(f'(x)συνx)'=(συν^2x)'\Rightarrow f'(x)συνx=συν^2x+c_1$ (1) , οπου $c_1\in\mathbb{R}$.

Απο την (1) για $x=0$ παιρνουμε:

$f'(0)συν0=συν^2 0+c_1\Rightarrow 1\cdot 1=1^2+c_1\Rightarrow c_1=0$.

Η (1) γραφεται $f'(x)συνx=συν^2x\Rightarrow f'(x)=συνx$ (για καθε $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$: $συνx>0$).

Αρα $f'(x)=(ημx)'\Rightarrow f(x)=ημx+c_2$ (2) , οπου $c_2\in\mathbb{R}$.

Απο την (2) για $x=0$ παιρνουμε:

$f(0)=ημ0+c_2\Rightarrow 1995=0+c_2\Rightarrow c_2=1995$.

Αρα για καθε $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ειναι $f(x)=ημx+1995$.

03

Θεωρουμε τους πραγματικους αριθμους α,β με 0<α<β, τη συνεχη συναρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποια $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=0$ και τη συναρτηση $g(x)=2+\frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ $x\in(0,+\infty)$. Να αποδειξετε οτι υπαρχει ενα τουλαχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τετοιο ωστε να ισχυουν :

α) Η εφαπτομενη της γραφικης παραστασης της συναρτησης g στο σημειο $(x_o\ ,\ g(x_o))$ να ειναι παραλληλη στον αξονα x΄x .

β) $g(x_o)=2+f(x_o)$.

α)

Οι συναρτησεις 2, $\frac{1}{x}$, $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ ειναι παραγωγισιμες στο $(0,+\infty)$ αρα και η συναρτηση $g(x)=2+\frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ ειναι παραγωγισιμη (αρα και συνεχης) στο $(0,+\infty)$.

Εχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ g(\alpha)=2+\frac{1}{\alpha}\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt=2+0=2 \\ \bullet\ g(\beta)=2+\frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=2+0=2 \end{array}\right\}\ \text{δηλαδη } g(\alpha)=g(\beta)$$

- η g ειναι συνεχης στο $[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)$
- η g ειναι παραγωγίσιμη στο (α,β)

Συμφωνα με το θεωρημα Rolle υπαρχει ενα τουλαχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τετοιο ωστε $g'(x_o)=0$, δηλαδη η εφαπτομενη της C_g στο $(x_o,g(x_o))$ ειναι παραλληλη στον αξονα x΄x .

β)

Ειναι

$$g'(x)=0+\left(\frac{1}{x}\right)'\int_{\alpha}^{x} f(t)dt+\frac{1}{x}\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=-\frac{1}{x^2}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt+\frac{1}{x}f(x),\ x\in(0,+\infty).$$

Απο το (α) ερωτημα ειναι: $g'(x_o)=0\Rightarrow-\frac{1}{x_0^{\,2}}\int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt+\frac{1}{x_0}f(x_o)=0$ (1)

Ακομη $g(x_o)=2+\frac{1}{x_0}\int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt\Rightarrow\int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt=x_og(x_o)-2x_o$ (2) .

Η (1) λογω της (2) γραφεται:

$$-\frac{1}{x_0^{\,2}}(x_og(x_o)-2x_o)+\frac{1}{x_0}f(x_o)=0\Rightarrow-\frac{1}{x_0}(g(x_o)-2)+\frac{1}{x_0}f(x_o)=0\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{x_0}(\ g(x_o)-2-f(x_o))=0\Rightarrow g(x_o)=2+f(x_o)\ .$$

04

Η συναρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ειναι παραγωγισιμη και ισχυει οτι $f'(x)>0$, για καθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειξετε οτι η συναρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x-t)dt$, $x\in\mathbb{R}$ με α, β πραγματικους αριθμους, ειναι παραγωγισιμη και οτι αν υπαρχει $x_0\in\mathbb{R}$ με $F'(x_0)=0$, τοτε $F(x)=0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$.

Θετουμε $x-t=u\Rightarrow t=x-u\Rightarrow dt=-du$ και για $t=\alpha$ παιρνουμε $u=x-\alpha$ ενω για $t=\beta$ παιρνουμε $u=x-\beta$. Ετσι εχουμε

$$F(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x-t)dt=\int_{x-\alpha}^{x-\beta}-f(u)du\Rightarrow F(x)=\int_{x-\alpha}^{2}-f(u)du+\int_{2}^{x-\beta}-f(u)du\Rightarrow F(x)=\int_{2}^{x-\alpha}f(u)du-\int_{2}^{x-\beta}f(u)du\ (1)$$

Η f ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$ (αφου ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$), ετσι λογω της (1) η F ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορα παραγωγισιμων συναρτησεων με $F'(x)=f(x-\alpha)(x-\alpha)'-f(x-\beta)(x-\beta)'\Rightarrow F'(x)=f(x-\alpha)-f(x-\beta)$ (2).

Αν υπαρχει $x_0\in\mathbb{R}$ με $F'(x_0)=0$, η (2) για $x=x_0$ γραφεται $0=f(x_0-\alpha)-f(x_0-\beta)\Rightarrow f(x_0-\alpha)=f(x_0-\beta)\Rightarrow x_0-\alpha=x_0-\beta\Rightarrow\alpha=\beta$, αφου η f ειναι γνησιως αυξουσα στο $\mathbb{R}$ ($f'(x)>0$,για καθε $x\in\mathbb{R}$) αρα θα ειναι και 1-1 σε αυτο.

Η (1) λοιπον γραφεται: $F(x)=\int_{2}^{x-\alpha}f(u)du-\int_{2}^{x-\alpha}f(u)du\Rightarrow F(x)=0$, για καθε $x\in\mathbb{R}$.

05

Η αξια μιας μηχανης που εκτυπωνει βιβλια μειωνεται με το χρονο t , συμφωνα με τη συναρτηση $f(t)=\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t\geq 0$, οπου A ενας θετικος αριθμος. Ο ρυθμος μεταβολης του κερδους K(t), απο την πωληση των βιβλιων που εκτυπωνει η συγκεκριμενη μηχανη, δινεται απο τη συναρτηση $K'(t)=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}$, $t\geq 0$ και υποθετουμε οτι $K(0)=0$. Να βρεθει η χρονικη στιγμη κατα την οποια πρεπει να πουληθει η μηχανη, ετσι ωστε το συνολικο κερδος P(t) απο τα βιβλια που πουληθηκαν συν την αξια της μηχανης να γινεται μεγιστο.

Για καθε $t\geq 0$ ειναι: $P(t)=K(t)+f(t)\Rightarrow$

- $P'(t)=K'(t)+f'(t)=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}+\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}\cdot\left(-\frac{t+28}{14}\right)'=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}-\frac{A}{4}e^{-\frac{t+28}{14}}=\frac{A}{4}\left(e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t+28}{14}}\right)$
- $P'(t)=0\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t+28}{14}}=0\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}}=e^{-\frac{t+28}{14}}\Leftrightarrow -\frac{t}{7}=-\frac{t+28}{14}\Leftrightarrow t=28$
- $P'(t)>0\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t+28}{14}}>0\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}}>e^{-\frac{t+28}{14}}\Leftrightarrow -\frac{t}{7}>-\frac{t+28}{14}\Leftrightarrow t<28$,
- $P'(t)<0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow t>28$

Αρα η συναρτηση P(t) παρουσιαζει μεγιστο στη θεση t=28, επομενως η χρονικη στιγμη κατα την οποια πρεπει να πουληθει η μηχανη, ετσι ωστε το συνολικο κερδος απο τα βιβλια που πουληθηκαν συν την αξια της μηχανης να γινεται μεγιστο, ειναι η t=28 .

06

Δινεται η συναρτηση f, δυο φορες παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποια ισχυει $f'(x)\neq 0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$ και η συναρτηση g τετοια ωστε $g(x)f'(x)=2f(x)$ για καθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειξετε οτι, αν η γραφικη παρασταση της f εχει σημειο καμπης το $A(x_o , f(x_o))$ τοτε η εφαπτομενη της γραφικης παραστασης της g στο σημειο $B(x_o , g(x_o))$ ειναι παραλληλη στην ευθεια $y-2x+5=0$.

Εφοσον η f ειναι δυο φορες παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ και το $A(x_o , f(x_o))$ σημειο καμπης της C_f θα ειναι $f''(x_o)=0$. Επειδη $f'(x)\neq 0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$ εχουμε:

- $g(x)=\dfrac{2f(x)}{f'(x)}$ και
- $g'(x)=\dfrac{2(f'(x))^2-2f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\Rightarrow g'(x_o)=\dfrac{2(f'(x_0))^2-2f(x_0)f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\Rightarrow g'(x_o)=\dfrac{2(f'(x_0))^2}{(f'(x_0))^2}\Rightarrow$

  $g'(x_o)=2$

Ο συντελεστης διευθυνσης της ευθειας $y-2x+5=0\Leftrightarrow y=2x-5$ ειναι 2 και ειναι ισος με τον συντελεστη διευθυνσης $g'(x_o)$ της εφαπτομενης της C_g στο Β.
Αρα η εφαπτομενη της C_g στο Β ειναι παραλληλη στην ευθεια $y-2x+5=0$.

07

Δινεται η συναρτηση $f(x)=x^4-2x^2+a$, $a\in\mathbb{R}$.
α) Αν $A(x_1 , f(x_1))$, $B(x_2 , f(x_2))$, $\Gamma(x_3 , f(x_3))$ ειναι τοπικα ακροτατα της γραφικης παραστασης της f και $x_1<x_2<x_3$, να αποδειξετε οτι η ευθεια ΑΒ ειναι καθετη στην ευθεια ΒΓ.
β) Αν $0<a<1$, να αποδειξετε οτι η εξισωση $f(x)=0$ εχει ακριβως μια λυση στο διαστημα $(-1 , 0)$.

α)
Εχουμε
- $f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$ και
- $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$.

Στις θεσεις αυτες η $f'(x)$ αλλαζει προσημο, αφου ολες οι ριζες της πολυωνυμικης εξισωσης $f'(x)=0$ ειναι απλες και επομενως στις θεσεις αυτες η f παρουσιαζει τοπικα ακροτατα.
Ειναι $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ και $f(-1)=a-1$, $f(0)=a$, $f(1)=a-1$.
Συνεπως: $A(-1 , a-1)$, $B(0 , a)$, $\Gamma(1 , a-1)$.
Ετσι: $\lambda_{AB}\cdot\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{a-(a-1)}{0-(-1)}\cdot\dfrac{a-1-a}{1-0}=1\cdot(-1)=-1$, αρα $AB\perp B\Gamma$.

β)
Για καθε $x\in(-1,0)$ ειναι $x<0$, $x-1<0$, $x+1>0$ αρα $f'(x)=4x(x-1)(x+1)>0$.
Η f λοιπον ειναι γνησιως αυξουσα στο $(-1,0)$, επομενως η εξισωση $f(x)=0$ εχει το πολυ μια ριζα στο $(-1 , 0)$.
Η f ειναι συνεχης στο $[-1,0]$ ως πολυωνυμικη και $f(-1)\cdot f(0)=(a-1)a<0$, αφου $0<a<1$, αρα (Bolzano) η εξισωση $f(x)=0$ εχει τουλαχιστον μια ριζα στο $(-1,0)$.
Απ'τα παραπανω προκυπτει οτι η $f(x)=0$ εχει ακριβως μια λυση στο $(-1,0)$.

08

Δινονται οι πραγματικοι αριθμοι κ , λ με κ<λ και η συναρτηση $f(x)=(x-κ)^5(x-λ)^3$ με $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειξετε οτι :

α) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{5}{x-κ}+\dfrac{3}{x-λ}$, για καθε $x\neq κ$ και $x\neq λ$.

β) Η συναρτηση $g(x)=\ln|f(x)|$ στρεφει τα κοιλα προς τα κατω στο διαστημα (κ , λ) .

α)

Για καθε $x\in\mathbb{R}$ ειναι $f'(x)=5(x-κ)4(x-λ)3+3(x-κ)5(x-λ)2$,

αρα για καθε $x\in\mathbb{R}-\{κ,λ\}$ εχουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{5(x-κ)^4(x-λ)^3}{(x-κ)^5(x-λ)^3}+\frac{3(x-κ)^5(x-λ)^2}{(x-κ)^5(x-λ)^3}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{5}{x-κ}+\frac{3}{x-λ}\ .$$

β)

Για καθε $x\in(κ,λ)$ ισχυει $κ<x<λ\Rightarrow\begin{cases}x-κ>0\\x-λ<0\end{cases}\Rightarrow f(x)<0\Rightarrow g(x)=\ln(-f(x))$, επομενως

$$g'(x)=\frac{-f'(x)}{-f(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{5}{x-κ}+\frac{3}{x-λ}\quad\text{και}\quad g''(x)=\frac{-5}{(x-κ)^2}+\frac{-3}{(x-λ)^2}<0\ .$$

Αρα η g στρεφει τα κοιλα προς τα κατω στο (κ , λ).