Πανελλαδικες Εξετασεις (1999)

01

α) Να αποδειξετε οτι : $ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$, για καθε $x \in [0, +\infty)$.

β) Εστω συναρτηση f παραγωγισιμη στο $[0, +\infty)$ για την οποια ισχυει :

$[f(x)]^5+2[f(x)]^3+3f(x)=(x+1)ln(x+1)-\frac{4}{5}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+182$, για καθε $x \in [0, +\infty)$.

Να αποδειξετε οτι η f ειναι γνησιως αυξουσα στο $[0, +\infty)$.

α)

Θεωρουμε τη συναρτηση $h(x) = ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}+\frac{1}{5}$, $x \geq 0$. Ειναι :

$h'(x)= \frac{1}{x+1}-1+x=\frac{x^2}{x+1}>0$ για $x>0$ και επειδη η h ειναι συνεχης στο $[0, +\infty)$ προκυπτει οτι η h ειναι γνησιως αυξουσα στο $[0, +\infty)$.

Ετσι για καθε $x \geq 0$ ειναι :

$h(x) \geq h(0) \Rightarrow ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{5} \geq ln1-0+0+\frac{1}{5} \Rightarrow ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{5} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow$

$ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{5}>0 \Rightarrow ln(x+1)>x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{5}$.

β)

Παραγωγιζουμε τα δυο μελη της δοσμενης ισοτητας και παιρνουμε :

$5[f(x)]^4f'(x)+6[f(x)]^2f'(x)+3f'(x)=ln(x+1) +1 -\frac{4}{5}- x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow$

$f'(x)(5[f(x)]4+6[f(x)]2+3) = ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}+\frac{1}{5}$ (1) , $x \geq 0$.

Η παρασταση $5[f(x)]4+6[f(x)]2+3$ εχει θετικο προσημο για καθε $x \geq 0$ ως αθροισμα δυο μη αρνητικων και ενος θετικου αριθμου . Το 2ο μελος εχει θετικο προσημο για καθε $x \geq 0$ λόγω του (α) και συνεπως απο την (1) προκυπτει $f'(x) > 0$ για καθε $x \geq 0$, οποτε η f ειναι γνησιως αυξουσα στο $[0, +\infty)$.

02

Θεωρουμε παραγωγισιμη συναρτηση f με πεδιο ορισμου το $\mathbb{R}$ τετοια ωστε $\frac{f(2)}{2}=\frac{f(1)}{1}$. Να αποδειξετε οτι η εξισωση $xf'(x)-f(x)=0$ εχει μια τουλαχιστον ριζα στο διαστημα (1 , 2) .

Θεωρουμε τη συναρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x \in [1,2]$ που ειναι συνεχης στο [1,2] ως πηλικο συνεχων συναρτησεων (η f ως παραγωγισιμη ειναι και συνεχης) και παραγωγισιμη στο (1,2) ως πηλικο παραγωγισιμων συναρτησεων με

$h'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)(x)'}{x^2}=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}$. Ακομη $h(1)= \frac{f(1)}{1}=\frac{f(2)}{2}= h(2)$.

Συμφωνα με το θεωρημα Rolle εχει μια τουλαχιστον ριζα στο (1,2) η εξισωση

$h'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}= 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0$.

03 *Δινεται η συναρτηση $f(x) = ημ^2(αx)$, $x \in \mathbb{R}$ και $α \in \mathbb{R}$. Να βρειτε την τιμη του α ωστε να ισχυει $f''(x) + 4α^2 f(x) = 2$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.*

Για καθε $x \in \mathbb{R}$ εχουμε

- $f'(x)=2ημ(αx)(ημ(αx))'=2ημ(αx)συν(αx)(αx)'=2α\cdot ημ(αx)συν(αx)$,
- $f''(x)=[2α\cdot ημ(αx)]'συν(αx)+2α\cdot ημ(αx)[συν(αx)]'=$
  $=2α^2συν(αx)συν(αx)-2α^2\cdot ημ(αx)ημ(αx)=2α^2συν^2(αx)-2α^2ημ^2(αx)$.

Ετσι για καθε $x \in \mathbb{R}$:

$f''(x)+4α^2f(x)=2 \Leftrightarrow 2α^2συν^2(αx)-2α^2ημ^2(αx)+4α^2ημ^2(αx) = 2 \Leftrightarrow$
$2α^2συν^2(αx)+2α^2ημ^2(αx)=2 \Leftrightarrow 2α^2(συν^2(αx)+ημ^2(αx))=2 \Leftrightarrow 2α^2\cdot 1 = 2 \Leftrightarrow$
$α^2 = 1 \Leftrightarrow α = 1$ ή $α = -1$.

04 *Δινεται η συναρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δυο φορες παραγωγισιμη , η οποια σε σημειο $x_o \in \mathbb{R}$ παρουσιαζει τοπικο ακροτατο το 0 και ικανοποιει τη σχεση : $f''(x) > 4(f'(x)-f(x))$, για καθε $x \in \mathbb{R}$.*

α) Να αποδειξετε οτι η συναρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ ειναι κυρτη στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδειξετε οτι ειναι $f(x) \geq 0$, για καθε $x \in \mathbb{R}$.

α)

Για καθε $x \in \mathbb{R}$ εχουμε :

- $g'(x)=f'(x)e^{-2x}-2f(x)e^{-2x}$,
- $g''(x)=f''(x)e^{-2x}-2f'(x)e^{-2x}-2f'(x)e^{-2x}+4f(x)e^{-2x}=e^{-2x}(f''(x)-4f'(x)+4f(x))$
- Απ'την υποθεση για καθε $x \in \mathbb{R}$ ειναι
  $f''(x)>4(f'(x)-f(x)) \Leftrightarrow f''(x)-4f'(x)+4f(x) > 0$

Επειδη $e^{-2x} > 0$ θα ειναι $g''(x)>0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$,
συνεπως η g ειναι κυρτη στο $\mathbb{R}$.

β)

Ισχυουν $f'(x_o) = 0$ (θεωρημα Fermat) και $f(x_o) = 0$.

Επειδη $g(x)=f(x)e^{-2x}$ και $e^{-2x}>0$ αρκει να δειξουμε οτι $g(x) \geq 0$, για καθε $x \in \mathbb{R}$.

Η g ειναι κυρτη στο $\mathbb{R}$ αρα η g' ειναι γνησιως αυξουσα στο $\mathbb{R}$. Ετσι εχουμε :

- Για $x>x_o \Rightarrow g'(x)>g'(x_o) \Rightarrow g'(x)>f'(x_o)e^{-2x_0}-2f(x_o)e^{-2x_0} \Rightarrow g'(x) > 0$.
- Για $x<x_o \Rightarrow g'(x)<g'(x_o) \Rightarrow g'(x)<f'(x_o)e^{-2x_0}-2f(x_o)e^{-2x_0} \Rightarrow g'(x) < 0$.
- $g'(x_o)=f'(x_o)e^{-2x_0}-2f(x_o)e^{-2x_0}=0$.

Αρα η g παρουσιαζει ολικο ελαχιστο στη θεση x_o , το $g(x_o) = f(x_o)e^{-2x_0} = 0$,
συνεπως για καθε $x \in \mathbb{R}$ ειναι $g(x) \geq g(x_o) \Rightarrow g(x) \geq 0$.

05

Δινεται η συναρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να μελετησετε ως προς τη μονοτονια τη συναρτηση f και να αποδειξετε οτι $f(x) > 0$ για καθε $x \in [1 , 3]$.
β) Να βρειτε το εμβαδον του χωριου που περικλειεται απο τη γραφικη παρασταση της συναρτησης f , τον αξονα x΄x και τις ευθειες x=1 και x=3 .

α)
Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ειναι
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$.
Το πρόσημο της $f'(x)$ φαινεται στον παρακατω πινακα :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	↗	↘	↗	

Αρα η f ειναι γνησιως αυξουσα στα διαστηματα $(-\infty, 1)$, $(3 , +\infty)$ και γνησιως φθινουσα στο $[1 , 3]$. Λογω της μονοτονιας της f στο $[1 , 3]$ εχουμε :
$1 \le x \le 3 \Rightarrow f(1) \ge f(x) \ge f(3) \Rightarrow f(x) \ge 3^3 - 6\cdot 3^2+9\cdot 3+1 \Rightarrow f(x) \ge 1$.
Συνεπως θα ειναι και $f(x) > 0$ για καθε $x \in [1 , 3]$.
β)
Για καθε $x \in [1 , 3]$ η f ειναι συνεχης ως πολυωνυμικη και ισχυει $f(x) > 0$.
Αρα το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$E = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9\cdot\frac{x^2}{2} + x\right]_1^3 = 6 \text{ τ.μ.}$$

06

Εστω $h : [1 , +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχης συναρτηση που ικανοποιει τη σχεση
$h(x) = 1999(x-1) + \int_1^x \frac{h(t)}{t}\,dt$, για καθε $x \ge 1$. Να αποδειξετε οτι :
α) $h(x) = 1999x\ln x$, $x \ge 1$. β) Η h ειναι γνησιως αυξουσα στο $[1 , +\infty)$.

α)
Για καθε $x \ge 1$ η h ειναι παραγωγισιμη ως αθροισμα παραγωγισιμων συναρτησεων και ειναι $h'(x)=1999+\frac{h(x)}{x} \Leftrightarrow h'(x)-\frac{h(x)}{x}=1999 \Leftrightarrow \frac{1}{x}h'(x)-\frac{1}{x}\frac{h(x)}{x} = \frac{1}{x}1999 \Leftrightarrow$
$\frac{1}{x}h'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)'h(x)=\frac{1}{x}1999 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}h(x)\right)'=(1999\ln x)' \Leftrightarrow \frac{1}{x}h(x)=1999\ln x+c$ (1) ,
οπου c πραγματικη σταθερα. Παρατηρουμε οτι $h(1)=1999(1-1)+\int_1^1 \frac{h(t)}{t}\,dt=0+0=0$,
οποτε απο την (1) για x=1 παιρνουμε $\frac{1}{1}h(1)=1999\ln 1+c \Leftrightarrow 0=0+c \Leftrightarrow c=0$.
Ετσι η (1): $\frac{1}{x}h(x)=1999\ln x \Leftrightarrow h(x)=1999x\ln x$, $x \ge 1$.
β)
Για καθε $x \ge 1$ ειναι $h'(x)=(1999x)'\ln x+1999x(\ln x)'=1999\ln x+1999>0$
(αφου για $x \ge 1$ ειναι $\ln x \ge 0$) . Αρα η h ειναι γνησιως αυξουσα στο $[1 , +\infty)$.