01

Θεωρουμε παραγωγισιμη συναρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τετοια ωστε :
$2xf(x) + (x^2+1)f'(x) = e^x$ για καθε $x \in \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$.

α) Να αποδειξετε οτι $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετησετε ως προς τη μονοτονια τη συναρτηση f.

α)
Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ειναι
$2xf(x) + (x^2+1)f'(x) = e^x \Leftrightarrow (x^2+1)'f(x) + (x^2+1)f'(x) = (e^x)' \Leftrightarrow$
$[(x^2+1)f(x)]' = (e^x)' \Leftrightarrow (x^2+1)f(x) = e^x + c$ (1), οπου c πραγματικη σταθερα.
Ομως $f(0)=1$ και η (1) για $x=0$ γραφεται $(0^2+1)f(0)=e^0+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c = 0$.
Ετσι απο την (1) προκυπτει οτι

$(x^2+1)f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β)
Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ειναι

$f'(x) = \dfrac{(e^x)'(x^2+1) - e^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^x(x^2+1) - e^x 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$, με το "=" να ισχυει

μονο για $x = 1$. Συνεπως η f ειναι γνησιως αυξουσα στο $\mathbb{R}$.

02

Δινεται η συναρτηση f με : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2)\ln(x - 5 + e) + 2(\alpha+1)e^{5-x} & , x \geq 5 \end{cases}$

α) Να βρεθουν τα $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$.

β) Να βρεθουν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ωστε η συναρτηση f να ειναι συνεχης στο $x_o=5$.

γ) Για τις τιμες των α , β του ερωτηματος (β) να βρειτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

α)
$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} (x^2-8x+16) = 25 - 40 + 16 = 1$,

$\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} [(\alpha^2+\beta^2)\ln(x-5+e)+2(\alpha+1)e^{5-x}] =$

$=(\alpha^2+\beta^2) \lim\limits_{x \to 5^+} [\ln(x-5+e) + 2(\alpha+1)] \lim\limits_{x \to 5^+} e^{5-x} \overset{\substack{5-x=t \\ x-5+e=u}}{=}$

$=(\alpha^2+\beta^2) \lim\limits_{u \to e^+} \ln u + 2(\alpha+1) \lim\limits_{t \to 0^-} e^t = (\alpha^2+\beta^2)\ln e + 2(\alpha+1)e^0 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha+2$.

β)
Η f ειναι συνεχης στο $x_o=5$ αν και μονο αν $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = f(5) \Leftrightarrow$

$1 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha+2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha+2 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha+1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 + \beta^2 = 0$ (1)
Απο την (1), επειδη οι αριθμοι $(\alpha+1)^2$, β^2 ειναι μη αρνητικοι, προκυπτει ισοδυναμα οτι $(\alpha+1)^2 = 0$ και $\beta^2 = 0$, δηλαδή οτι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

γ)
Για καθε $x \geq 5$ και για $\alpha = -1$, $\beta = 0$ ειναι $f(x) = \ln(x-5+e)$. Αρα εχουμε :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-5+e) \overset{x-5+e=w}{=} \lim\limits_{w \to +\infty} \ln w = +\infty$.

03

Η συναρτηση f ειναι παραγωγισιμη στο κλειστο διαστημα [0 , 1] και ισχυει $f'(x)>0$ για καθε $x\in(0 , 1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δειξετε οτι :

α) η ευθεια $y = 3$ τεμνει τη γραφικη παρασταση της f σ' ενα ακριβως σημειο με τετμημενη $x_o\in(0 , 1)$.

β) υπαρχει $x_1\in(0 , 1)$, τετοιο ωστε $f(x_1) = \dfrac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4}$

γ) υπαρχει $x_2\in(0 , 1)$, ωστε η εφαπτομενη της γραφικης παραστασης της f στο σημειο $M(x_2 , f(x_2))$ να ειναι παραλληλη στην ευθεια $y = 2x+2000$.

α)

Οι τετμημενες των κοινων σημειων της ευθειας y=3 και της C_f βρισκονται αν λυσουμε την εξισωση $f(x)=3 \Leftrightarrow f(x)-3=0$.

Θεωρουμε τη συναρτηση $h(x)=f(x)-3$, $x\in [0 , 1]$. Αρκει να δειξουμε οτι η εξισωση $h(x)=0$ εχει ακριβως μια λυση στο (0 , 1) .

Η f ειναι παραγωγισιμη στο [0,1] αρα θα ειναι και συνεχης σε αυτο .Επειδη η h ειναι συνεχης στο [0,1] (ως διαφορα παραγωγισιμων συναρτησεων) και $h(0)h(1)=(f(0)-3)(f(1)-3)=(2-3)(4-3)=-1<0$, συμφωνα με το θεωρημα Bolzano θα υπαρχει ενα τουλαχιστον $x_o\in (0,1)$ τετοιο ωστε $h(x_o)=0$.

Ακομη εχουμε $h'(x)=f'(x)-(3)'=f'(x)>0$, $x\in (0,1)$. Αρα η h ειναι γνησιως αυξουσα στο (0,1) συνεπως η εξίσωση $h(x)=0$ εχει το πολυ μια ριζα στο (0,1).

Επομενως το $x_o\in(0,1)$ τετοιο ωστε $h(x_o)=0$ ειναι μοναδικο.

β)

Εφοσον η f ειναι συνεχης στο [0,1] και $f'(x)>0$ για καθε $x\in(0,1)$, η f ειναι γνησιως αυξουσα στο [0,1] . Αρα:

$0 < \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f(\frac{1}{5}) < f(1) \Rightarrow 2 < f(\frac{1}{5}) < 4$,

…………………………………………………..

……………………………………………………

$0 < \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f(\frac{4}{5}) < f(1) \Rightarrow 2 < f(\frac{4}{5}) < 4$. Αρα θα εχουμε :

$2+2+2+2 < f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5}) < 4+4+4+4 \Rightarrow 8 < f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5}) < 16 \quad (1).$

Θεωρουμε τη συναρτηση $g(x)=f(x)-\dfrac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4}$, $x\in [0 , 1]$.

Η g ειναι συνεχης στο [0,1] ως διαφορα συνεχων συναρτησεων .Ακομη ειναι:

$$g(0) = 2 - \frac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4} = \frac{8-[f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})]}{4} \overset{(1)}{<} 0 ,$$

$$g(1) = 4 - \frac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4} = \frac{16-[f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})]}{4} \overset{(1)}{>} 0 ,$$

δηλαδη $g(0)g(1)<0$. Συμφωνα με το θεωρημα Bolzano υπαρχει $x_1\in(0,1)$, τετοιο ωστε $g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) - \dfrac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$f(x_1) = \dfrac{f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})}{4}$.

γ)

Η f ειναι συνεχης στο [0,1] και παραγωγισιμη στο (0,1) .

Συμφωνα με το θεωρημα μεσης τιμης υπαρχει ενα τουλαχιστον $x_2 \in (0,1)$ τετοιο ωστε $f'(x_2) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = 4-2 = 2$.

Η εφαπτομενη της C_f στο Μ εχει τον ιδιο συντελεστη διευθυνσης με την ευθεια $y = 2x+2000$ (τον αριθμο 2), αρα ειναι παραλληλες .

04

Εστω η συναρτηση $f : (1 , +\infty) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = 2000 + |\ln(x-1)|$. Εστω c πραγματικος μεγαλυτερος του 2000 . Εστω οτι η ευθεια με εξισωση y = c και η γραφικη παρασταση της f τεμνονται σε δυο διαφορετικα σημεια του επιπεδου , τα Α και Β . Να αποδειξετε οτι οι εφαπτομενες της γραφικης παραστασης της f , στα Α και Β , ειναι καθετες μεταξυ τους .

Επειδη $\ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 1 \Leftrightarrow x > 2$, ο τυπος της f χωρις απολυτη τιμη γραφεται $f(x) = \begin{cases} 2000+\ln(x-1), & x \geq 2 \\ 2000-\ln(x-1), & 1<x<2 \end{cases}$.

Οι τετμημενες των κοινων σημειων της ευθειας y = c και της C_f βρισκονται απο τη λυση της εξισωσης

$f(x) = c \Leftrightarrow 2000 + |\ln(x-1)| = c \Leftrightarrow |\ln(x-1)| = c - 2000 \overset{c>2000}{\Leftrightarrow}$

$\left.\begin{array}{l} \ln(x-1) = c-2000 \\ \ln(x-1) = -(c-2000) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = e^{c-2000}+1 \\ x = e^{-(c-2000)}+1 \end{array}\right\}$ Εστω $\begin{array}{l} x_1 = e^{c-2000}+1 \\ x_2 = e^{-(c-2000)}+1 \end{array}$

Χωρις βλαβη της γενικοτητας εστω οτι $A(x_1 , f(x_1))$ και $B(x_2 , f(x_2))$.

Για να δειξουμε οτι οι εφαπτόμενες της C_f στα Α και Β ειναι καθετες μεταξυ τους , αρκει να δειξουμε οτι $f'(x_1)f'(x_2) = -1$.

Για x>2 εχουμε $f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$ και για $1<x<2$ εχουμε $f'(x) = -\dfrac{1}{x-1}$.

Επειδη $c > 2000$ ειναι $c - 2000 > 0 \Rightarrow e^{c-2000} > 1$ και $e^{-(c-2000)} < 1$, οποτε $x_1 > 2$ και $1 < x_2 < 2$. Αρα

$f'(x_1)f'(x_2) = \dfrac{1}{e^{c-2000}+1-1} \cdot \left(-\dfrac{1}{e^{-(c-2000)}+1-1}\right) = \dfrac{1}{e^{c-2000}} \cdot \dfrac{-1}{e^{-(c-2000)}} = \dfrac{-1}{e^0} = -1$.

05

Θεωρουμε τη συναρτηση f με $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδειξετε οτι η εξισωση $f(x) + f(y) = 0$ με $x, y \in \mathbb{R}$, παριστανει κυκλο και να βρειτε το κεντρο και την ακτινα του.
β) Να υπολογισετε το εμβαδον του χωριου που περικλειεται απο τη γραφικη παρασταση της f και τον αξονα x΄x.

α)
Η εξισωση $f(x) + f(y) = 0$ γραφεται :
$x^2-4x+3+y^2-4y+3=0 \Leftrightarrow x^2-4x+y^2-4y=-6 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4=-6+4+4 \Leftrightarrow$
$(x-2)^2+(y-2)^2=2$, που ειναι εξισωση κυκλου με κεντρο K(2,2) και ακτινα $\rho=\sqrt{2}$.
β)
$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.
Επειδη η f ειναι συνεχης στο [1,3] και $f(x) \leq 0$ για καθε $x \in [1,3]$ το ζητουμενο εμβαδο ειναι :
$$E = \int_1^3 -f(x)\,dx = \int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^3 = \frac{4}{3} \text{ τ.μ.}$$

06

Θεωρουμε συνεχη συναρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιει την ισοτητα :
$$\int_0^x (1+t^2)f(t)\,dt = x^2 + \int_0^1 6x(t^2+t)\,dt,\ x \in \mathbb{R}$$
α) Να αποδειξετε οτι $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2+1}$.
β) Να βρειτε την εξισωση της εφαπτομενης της γραφικης παραστασης της f στο σημειο της A(0 , f(0)).

α)
Η δοθεισα ισοτητα γραφεται
$$\int_0^x (1+t^2)f(t)\,dt = x^2 + x\int_0^1 (6t^2+6t)\,dt \Leftrightarrow \int_0^x (1+t^2)f(t)\,dt = x^2 + x\cdot[2t^3+3t^2]_0^1 \Leftrightarrow$$
$$\int_0^x (1+t^2)f(t)\,dt = x^2 + x\cdot(5-0) \Leftrightarrow \int_0^x (1+t^2)f(t)\,dt = x^2 + 5x \quad (1),\ x \in \mathbb{R}.$$
Παραγωγιζουμε τα δυο μελη της (1) και εχουμε
$$(1+x^2)f(x) = 2x+5 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}.$$
β)
Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ειναι
$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-(2x+5)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-10x+2}{(x^2+1)^2}$$ και $f'(0)=2$ ενω $f(0)=5$.
Η ζητουμενη εξισωση ειναι : $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 2x+5$.

07

Θεωρουμε συναρτηση f συνεχη στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδειξετε οτι $\int_0^3 f(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^7 f(x)\,dx$.

β) Εστω οτι $4\int_0^3 f(2x+1)\,dx = \int_1^7 f(x)\,dx + 2004$. Να αποδειξετε οτι υπαρχει ενα τουλαχιστον $\xi \in (1\ ,\ 7)$ τετοιο , ωστε $f(\xi) = 334$.

α)

Για το ολοκληρωμα $\int_0^3 f(2x+1)dx$, θετουμε $2x+1=u$ οποτε: $x=\frac{1}{2}(u-1) \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$.

Για $x=0$ παιρνουμε $u=1$ ενω για $x=3$ παιρνουμε $u=7$. Ετσι εχουμε

$$\int_0^3 f(2x+1)\,dx = \int_1^7 f(u)\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_1^7 f(u)\,du = \frac{1}{2}\int_1^7 f(x)\,dx .$$

β)

Η δοσμενη ισοτητα λογω του (α) γραφεται

$$4\cdot\frac{1}{2}\int_1^7 f(x)\,dx = \int_1^7 f(x)\,dx + 2004 \Leftrightarrow \int_1^7 f(x)\,dx = 2004 .$$

Θεωρουμε τη συναρτηση $g(x)=\int_1^x f(u)\,du - 334x,\ x \in [1,7]$.

Η g ειναι συνεχης στο $[1,7]$ ως διαφορα συνεχων συναρτησεων και παραγωγισιμη στο $(1,7)$ ως διαφορα παραγωγισιμων συναρτησεων με $g'(x)=f(x)-334$.

Ακομη : $g(1)=\int_1^1 f(u)\,du - 334\cdot 1=-334$, $g(7)=\int_1^7 f(u)\,du - 334\cdot 7=2004-2338=-334$,

δηλαδη $g(1)=g(7)$.

Συμφωνα με το θεωρημα Rolle υπαρχει ενα τουλαχιστον $\xi \in (1,7)$ τετοιο, ωστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi) - 334 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 334$.

08

Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτηση συνεχης στο $\mathbb{R}$. Εστω $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συναρτηση με $I(x) = \int_0^1 [(f(t))^2 - 2xt^2 f(t) + x^2 t^4]\,dt$, για $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειξετε οτι η συναρτηση I παρουσιαζει ελαχιστο στο σημειο $x_o = 5\int_0^1 t^2 f(t)\,dt$.

Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ειναι

• $I(x) = \int_0^1 (f(t))^2 dt - 2x\int_0^1 t^2 f(t)\,dt + x^2\int_0^1 t^4 dt$ και

• $I'(x) = \left(\int_0^1 (f(t))^2 dt\right)' - 2\int_0^1 t^2 f(t)\,dt\cdot(x)' + \int_0^1 t^4 dt\cdot(x^2)' = 0 - 2\int_0^1 t^2 f(t)\,dt + 2\int_0^1 t^4 dt\cdot x =$

$$= -2\int_0^1 t^2 f(t)\,dt + 2\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1\cdot x = -2\int_0^1 t^2 f(t)\,dt + \frac{2}{5}x .$$

Εχουμε

•$I'(x)=0 \Leftrightarrow x=5\int_0^1 t^2 f(t)\,dt$,

•$I'(x)>0 \Leftrightarrow x>5\int_0^1 t^2 f(t)\,dt$ και

•$I'(x)<0 \Leftrightarrow x<5\int_0^1 t^2 f(t)\,dt$.

Αρα η συναρτηση I παρουσιαζει ελαχιστο στο σημειο xo = $5\int_0^1 t^2 f(t)\,dt$.

09

Εστω $f\,,\,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ειναι συναρτησεις συνεχεις στο $\mathbb{R}$ τετοιες, ωστε να ισχυει $f(x)-g(x)=x-4$ για $x\in\mathbb{R}$. Εστω οτι η ευθεια με εξισωση $y=3x-7$ ειναι ασυμπτωτη της γραφικης παραστασης της f , καθως $x\to+\infty$.

α) Να βρειτε τα ορια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+3x+ημ2x}{xf(x)-3x^2+1}$.

β) Να αποδειξετε οτι η ευθεια με εξισωση $y = 2x-3$ ειναι ασυμπτωτη της γραφικης παραστασης της g , καθώς $x\to+\infty$.

α)

Απο την $f(x) - g(x) = x- 4$ παιρνουμε $g(x) = f(x) -x + 4$, για $x\in\mathbb{R}$. Επειδη η ευθεια με εξισωση $y=3x-7$ ειναι ασυμπτωτη της γραφικης παραστασης της f , καθως $x\to+\infty$, θα εχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=-7$. Ετσι ειναι :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x+4}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{4}{x}\right)=3-1+0=2$. Ακομη :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+3x+ημ2x}{xf(x)-3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{g(x)}{x}+3+\dfrac{ημ2x}{x}}{(f(x)-3x)+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{2+3+0}{-7+0}=-\dfrac{5}{7}$, γιατι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ημ2x}{x}=0$

(για καθε $x>0$: $-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{ημ2x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ημ2x}{x}=0$) .

β)

Για να δειξουμε οτι η ευθεια με εξισωση $y = 2x-3$ ειναι ασυμπτωτη της γραφικης παραστασης της g , καθως $x\to+\infty$, αρκει να δειξουμε οτι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2x)=-3$. Η ισοτητα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=2$ εχει αποδειχθει στο (α) .

Εχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+4-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)+4=-7+4=-3$ και συνεπως το ζητουμενο εχει αποδειχθει .

10

Φαρμακο χορηγειται σε ασθενη για πρωτη φορα . Εστω f(t) η συναρτηση που περιγραφει τη συγκεντρωση του φαρμακου στον οργανισμο του ασθενους μετα απο χρονο t απο τη χορηγηση του , οπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμος μεταβολης της f(t) ειναι $\frac{8}{t+1}-2$:

α) Να βρειτε τη συναρτηση f(t) .

β) Σε ποια χρονικη στιγμη t, μετα τη χορηγηση του φαρμακου, η συγκεντρωση του στον οργανισμο γινεται μεγιστη ;

γ) Να δειξετε οτι κατα τη χρονικη στιγμη t = 8 υπαρχει ακομα επιδραση του φαρμακου στον οργανισμο , ενω πριν τη χρονικη στιγμη t = 10 η επιδραση του στον οργανισμο εχει μηδενιστει . (Δινεται οτι $\ln 11 \cong 2,4$)

α)

Για καθε $t \geq 0$ ειναι

$f'(t)=\frac{8}{t+1}-2 \Leftrightarrow f'(t)=(8\cdot\ln(t+1)-2t)' \Leftrightarrow f(t)=8\cdot\ln(t+1)-2t+c$, οπου c πραγματικη σταθερα. Επειδη τη χρονικη στιγμη t=0 δεν υπαρχει συγκεντρωση του φαρμακου στον οργανισμο θα ειναι

$f(0)=0 \Leftrightarrow 8\cdot\ln(0+1)-2\cdot0+c=0 \Leftrightarrow c=0$.

Αρα $f(t)=8\cdot\ln(t+1)-2t$, $t \geq 0$.

β)

Για καθε $t \geq 0$ ειναι $f'(t)=\frac{8}{t+1}-2=\frac{-2(t-3)}{t+1}$,

$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=3$, $f'(t)>0 \Leftrightarrow t\in[0,3)$ και $f'(t)<0 \Leftrightarrow t>3$.

Αρα η f παρουσιαζει ολικο μεγιστο στη θεση 3 το f(3) , επομενως η συγκεντρωση του φαρμακου στον οργανισμο γινεται μεγιστη τη χρονικη στιγμη t = 3 .

γ)

$f(8) = 8\cdot\ln(8+1) - 2\cdot8 = 8(\ln 9 - 2) = 8(\ln 3^2 - 2) = 16(\ln 3 - 1) > 0$,γιατι $3 > e \Rightarrow \ln 3 > \ln e \Rightarrow \ln 3 > 1$.

Αρα κατα τη χρονικη στιγμη t=8 υπαρχει ακομα επιδραση του φαρμακου στον οργανισμο .

$f(10) = 8\cdot\ln(10+1) - 2\cdot10 = 8\cdot\ln 11 - 20 \cong 8\cdot2,4 - 20 = -0,8 < 0$.

Η f ειναι συνεχης στο [8 , 10] και $f(8)f(10) < 0$, αρα συμφωνα με το θεωρημα Bolzano υπαρχει χρονικη στιγμη $t_o \in (8,10)$ τετοια ωστε $f(t_o) = 0$, δηλαδη τη χρονικη στιγμη t_o η επιδραση του φαρμακου στον οργανισμο εχει μηδενιστει .

11

Τη χρονικη στιγμη $t = 0$ χορηγειται σ' εναν ασθενη ενα φαρμακο. Η συγκεντρωση του φαρμακου στο αιμα του ασθενους δινεται απο τη συναρτηση

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2},\ t \geq 0,$$

οπου α και β ειναι σταθεροι θετικοι πραγματικοι αριθμοι και ο χρονος t μετραται σε ωρες. Η μεγιστη τιμη της συγκεντρωσης ειναι ιση με 15 μοναδες και επιτυγχανεται 6 ωρες μετα τη χορηγηση του φαρμακου .

α) Να βρειτε τις τιμες των σταθερων α και β .

β) Με δεδομενο οτι η δραση του φαρμακου ειναι αποτελεσματικη , οταν η τιμη της συγκεντρωσης ειναι τουλαχιστον ιση με 12 μοναδες , να βρειτε το χρονικο διαστημα που το φαρμακο δρα αποτελεσματικα .

α)

Επειδη η f παρουσιαζει ακροτατο στη θεση 6 το 15 και ειναι παραγωγισιμη στο $[0, +\infty)$ θα εχουμε:

$f'(6) = 0$ και $f(6) = 15$.

Για καθε $t \geq 0$ εχουμε :

$\bullet f(t) = \dfrac{\beta^2 \alpha t}{\beta^2 + t^2}$ και

$$\bullet f'(t) = \beta^2\alpha\cdot\left(\frac{t}{\beta^2+t^2}\right)' = \beta^2\alpha\cdot\frac{(t)'(\beta^2+t^2)-t(\beta^2+t^2)'}{(\beta^2+t^2)^2} = \beta^2\alpha\cdot\frac{\beta^2+t^2-2t^2}{(\beta^2+t^2)^2} = \beta^2\alpha\cdot\frac{\beta^2-t^2}{(\beta^2+t^2)^2}\ .$$

Επομενως (α και β θετικοι αριθμοι) :

$$f'(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2-6^2}{(\beta^2+6^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \beta = 6\ ,\quad f(6) = 15 \Leftrightarrow \frac{36\alpha\cdot 6}{36+36} = 15 \Leftrightarrow \alpha = 5\ .$$

β)

Ειναι (για $\alpha = 5$ και $\beta = 6$) $f(t) = \dfrac{\beta^2 \alpha t}{\beta^2+t^2} = \dfrac{180t}{36+t^2}$, $t \geq 0$.

Η δραση του φαρμακου ειναι αποτελεσματικη , οταν

$$f(t) \geq 12 \Leftrightarrow \frac{180t}{36+t^2} \geq 12 \Leftrightarrow t^2 - 15t + 36 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [3, 12].$$